Calcolo delle probabilità

La nozione di evento casuale **o** aleatorio è assunta come primitiva ed è sinonimo di <<avvenimento il cui verificarsi dipende dal caso>>. Probabilità è un numero associato al presentarsi di un evento aleatorio e denota l'attendibilità razionale che ha l'evento stesso di verificarsi. Consideriamo un esperimento (o schema probabilistico) **E** (ad esempio il lancio di una moneta, il lancio di due dadi, l'estrazione di una pallina da un'urna,...). Col termine prova intendiamo una singola esecuzione di un determinato esperimento. Da questa prova si ottiene un singolo risultato elementare detto evento aleatorio elementare. All'evento associamo, secondo regole da fissare, un numero che esprime la probabilità che l'evento aleatorio si verifichi. Quindi con l'espressione <<**probabilità dell'evento A**>> intendiamo riferirci ad un particolare numero che meglio di altri è in grado di sintetizzare la fiducia che noi riponiamo nella sua realizzazione. Precisiamo con alcune definizioni quanto finora detto.

- si dice esperimento aleatorio o casuale ogni fenomeno del mondo reale il cui risultato non può esse previsto con certezza.
- si dice evento aleatorio uno dei possibili esisti di un esperimento aleatorio
- si dice probabilità di un evento il numero che esprime una stima approssimata della possibilità che esso si verifichi

Sono esperimenti aleatori il lancio di un dado, l'estrazione di un numero in una lotteria, l'estrazione di una carta da gioco da un mazzo. Sono eventi aleatori:

- nel lancio di una moneta <<esce testa>>, oppure <<esce croce>>.
- nell'estrazione di una carta da gioco, <<esce il re>> oppure <<esce una carta di fiori>>.

Consideriamo l'esperimento casuale del lancio di un dado. Questo esperimento fornisce il seguente insieme: $\boldsymbol{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}}$ che evidenzia sei eventi elementari $e_1 = \{1\}$, $e_2 = \{2\}$, $e_3 = \{3\}$, $e_4 = \{4\}$, $e_5 = \{5\}$, $e_6 = \{6\}$ e diversi eventi complessi, come l'evento

$A = \{2,4,6\}$ = comparsa di un numero pari

o l'evento $B = \{1,3,5\}$ = comparsa di un numero dispari

Definizione classica di probabilità

La definizione classica di probabilità enunciata da Laplace afferma quanto segue: **la probabilità $p(E)$ che si verifichi un evento aleatorio E coincide col rapporto tra il numero f dei casi favorevoli all'evento E ed il numero n dei casi possibili nell'ipotesi che essi siano tutti ugualmente possibili**. In formule abbiamo:

$$\mathbf{p}(\mathbf{E}) = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{n}} \qquad \text{con} \qquad f \le n \qquad 0 \le p(E) \le 1$$

$f = 0 \quad \Rightarrow \quad p(A) = 0 \Rightarrow$ l'evento **A** è impossibile, cioè non può verificarsi mai

$f = n \quad \Rightarrow \quad p(A) = 1 \Rightarrow$ l'evento A è certo, $n = 2f \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ l'evento A si dice equiprobabile $p(A) < \frac{1}{2}$ l'evento A è detto improbabile , $p(A) > \frac{1}{2}$ l'evento A è detto probabile. La definizione classica di probabilità è applicabile quando siamo in grado di definire il numero dei casi possibili ed equiprobabili.

Esempi

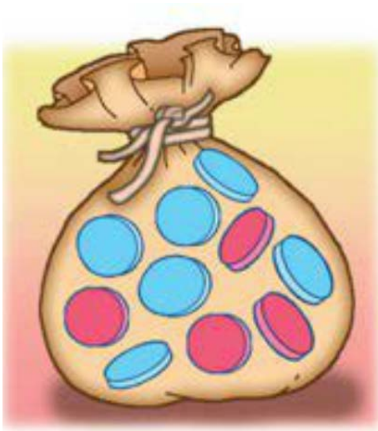
Supponiamo di estrarre a caso un gettone da un sacchetto contenente 6 gettoni azzurri e 4 gettoni rossi. Consideriamo i seguenti eventi casuali:

$\mathbf{E_1}$ = viene estratto un gettone azzurro $\mathbf{E_2}$ = viene estratto un gettone rosso

Vogliamo calcolare la probabilità di ognuno questi due eventi. I casi possibili sono 10, quelli favorevoli all'evento $\mathbf{E_1}$ sono 6, quelli favorevoli all'evento $\mathbf{E_2}$ sono 4. Risulta:

$$\mathbf{p}(\mathbf{E_1}) = \frac{6}{10} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{E_2}) = \frac{4}{10} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$$



Si consideri il lancio simultaneo di due dadi e si determini la probabilità dell'evento complesso

"la somma dei punteggi delle due facce è 5"

La tabella indica tutti i casi possibili che sono 36. Ognuno di questi casi rappresenta un evento elementare. L'evento proposto, "la somma dei punteggi delle due facce è 5", è un evento complesso. I casi favorevoli, indicati in rosso, sono 4. $p(E)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

6	$(1,6)$	$(2,6)$	$(3,6)$	$(4,6)$	$(5,6)$	$(6,6)$
5	$(1,5)$	$(2,5)$	$(3,5)$	$(4,5)$	$(5,5)$	$(6,5)$
4	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$(5,4)$	$(6,4)$
3	$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$(5,3)$	$(6,3)$
2	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(5,2)$	$(6,2)$
1	$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(5,1)$	$(6,1)$
	1	2	3	4	5	6

Definizione: dati due eventi che dipendono da uno stesso esperimento casuale (stesso schema probabilistico), diciamo che essi sono:

- compatibili se possono verificarsi contemporaneamente, cioè se il verificarsi di uno di essi non esclude il verificarsi dell'altro.
- incompatibili se non possono verificarsi contemporaneamente, cioè se il verificarsi di uno di essi esclude il verificarsi dell'altro.

Come esempio consideriamo lo schema probabilistico del lancio di un dado. Gli eventi elementari sono i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prendiamo in esame i seguenti eventi complessi:

$\mathbf{E_1=\{1,3,5\}}$ = esce un numero dispari $\mathbf{E_2=\{3\}}$ = esce il numero 3 $\mathbf{E_3=\{4\}}$ = esce il numero 4.

Gli eventi E_1 ed E_2 sono compatibili, in quanto se esce l'evento elementare 3, si verificano entrambi. Gli eventi E_1 ed E_3 sono incompatibili perché nessuno dei 6 eventi elementari sono contemporaneamente eventi favorevoli agli eventi E_1 ed E_3.

Due eventi sono indipendenti se il verificarsi di uno di essi non altera la probabilità di verificarsi dell'altro. Quindi l'evento A è indipendente dall'evento B se il verificarsi dell'evento B non modifica la probabilità di verificarsi dell'evento A e viceversa. L'estrazione di successive palline da un'urna, dopo che si sia reimmessa nell'urna la precedente, è un modello di studio per eventi indipendenti. Due eventi sono dipendenti se il verificarsi di uno di essi modifica la probabilità di verificarsi dell'altro. L'estrazione di successive palline da un'urna, senza reimmissione nell'urna della pallina estratta, è un modello di studio per eventi dipendenti.

Adesso vogliamo considerare eventi complessi che hanno una particolare importanza nel calcolo delle probabilità. Abbiamo chiamato complesso un qualsiasi evento che risulti combinazione di altre eventi più semplici, in particolare di eventi elementari dello schema probabilistico considerato.

01) si chiama evento unione (o evento somma o evento totale) e si indica col simbolo AUB (o $A+B$) l'evento C che si verifica quando si realizza almeno uno degli eventi A e B: $C=AUB=A+B$

C si realizza se si realizza A, o si realizza B o si realizzano entrambi.

02) si chiama evento intersezione (o evento prodotto o evento composto) e si indica con $A\cap B$ (o $A\cdot B$) l'evento C che si realizza quando si verificano contemporaneamente gli eventi A e B. $C=A\cap B=A\cdot B$

Teorema della probabilità totale per eventi incompatibili

Dati due eventi A e B incompatibili la probabilità dell'evento unione (totale) $A\cup B$ è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi $p(AUB)=p(A+B)=p(A)+p(B)$

Calcolare la probabilità che nel lancio di un dado esca il numero 4 o un numero dispari.

E_1 = esce il numero 4 E_2 = esce un numero dispari

Questi due eventi sono incompatibili perché se esce il numero 4 non possiamo avere un numero dispari, mentre se esce un numero dispari non possiamo avere il numero 4.

$E=E_1\cup E_2=E_1+E_2$ = esce il numero 4 o un numero dispari

$$\mathbf{p(E)}=p(E_1\cup E_2)=p(E_1+E_2)=p(E_1)+p(E_2)=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Per tre eventi incompatibili abbiamo:

$$p(AUB)=p(A+B)=p(A)+p(B) \qquad p(AUBUC)=p(A+B+C)=p(A)+p(B)+p(C)$$

Teorema della probabilità totale per eventi compatibili

Dati due eventi A e B compatibili la probabilità dell'evento somma $A\cup B$ è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi diminuita della probabilità che si verifichino contemporaneamente i due eventi A e B (evento intersezione):

$$p(AUB)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

Calcolare la probabilità che, lanciando un dado, esca un numero che sia dispari oppure minore di 4

I due eventi $A = \{1,3,5\}$ = esce un numero dispari, $B = \{1,2,3\}$ = esce un numero minore di 4 sono compatibili fra loro in quanto $A \cap B = \{1,3\}$

Ricordando che $p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $p(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ possiamo scrivere:

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Il teorema della probabilità composta per eventi compatibili ed indipendenti

La probabilità di verificarsi di un evento C composto di due eventi A e B compatibili e indipendenti è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi

$$\mathbf{p(C) = p(A\cap B) = p(A\cdot B) = p(A)\cdot p(B)} \qquad [*]$$

Il teorema della probabilità composta per eventi compatibili e dipendenti

La probabilità di verificarsi di un evento composto C, formato da due eventi A e B compatibili e dipendenti, è data dal prodotto della probabilità che ha il primo evento di verificarsi per la probabilità che ha il secondo nell'ipotesi che il primo si sia verificato.

$$\mathbf{p(C) = p(A\cap B) = p(A\cdot B) = p(A)\cdot p(B/A) = p(B)\cdot p(A/B)}$$

Il simbolo $\mathbf{p(A/B)}$ rappresenta la probabilità dell'evento $\mathbf{A}$ quando l'evento $\mathbf{B}$ si è verificato.

Il simbolo $\mathbf{p(B/A)}$ rappresenta la probabilità dell'evento $\mathbf{B}$ quando l'evento $\mathbf{A}$ si è verificato.

Si può dimostrare che risulta: $\mathbf{p(A/B) = p(B/A)}$

Esempio: **Consideriamo l'estrazione senza reinserimento di due palline da un'urna contenente una pallina verde, due rosse e due blu, come indicato in figura. Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia verde e la seconda blu.**

L'evento del quale dobbiamo calcolare la probabilità è l'evento

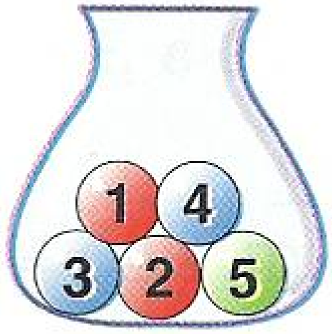
C = la prima pallina estratta è verde e la seconda è blu. L'evento C lo possiamo immaginare come l'evento composto dei due seguenti eventi elementari:

A = la prima pallina estratta è verde **B** = la seconda pallina estratta è blu.

Si tratta di due eventi dipendenti.

$$p(A)=\frac{1}{5} \qquad p(B/A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$p(C)=p(A\cdot C)=p(A)\cdot p(B/A)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$



Esempio: **Consideriamo l'estrazione con reinserimento di due palline da un'urna contenente una pallina verde, due rosse e due blu, come indicato in figura. Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia verde e la seconda blu.**

Questa volta gli eventi **A** ed **B** sono indipendenti, perché l'estrazione avviene con reinserimento.

$$p(A)=\frac{1}{5} \qquad p(B)=\frac{2}{5} \qquad \mathbf{p(C)}=p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\mathbf{\frac{2}{25}}$$

Definizione frequentista di probabilità

Volendo utilizzare il calcolo delle probabilità nello studio della realtà che ci circonda, l'uso della probabilità classica si rivela assai limitato. Ad esempio, la definizione classica di probabilità non ci consente di stabilire quale probabilità ha una persona di 30 anni di essere in vita tra 10 anni. Occorre introdurre altri metodi che ci consentano di determinare la probabilità di più vaste classi di eventi aleatori. La definizione classica di probabilità è applicabile soltanto quanto siamo in grado di definire il numero dei casi possibili ed equiprobabili. Quando questo non è possibile può essere utile fare ricorso alla teoria frequentista di probabilità di un evento che si basa sulle prove effettuate ed il numero di volte in cui l'evento si verifica. Si definisce frequenza relativa o probabilità sperimentale il rapporto fra il numero **f** di volte in cui l'evento **E** si è verificato ed il numero **n** delle prove effettuate: $\mathbf{f_r=\frac{f}{n}}$

Evidentemente la frequenza di un certo evento **E** varia al variare delle prove e, addirittura, pur mantenendo fisso il numero delle prove sullo stesso evento **E** e nelle stesse condizioni le frequenze di ogni singolo insieme di prove potranno risultare tra loro diverse. Tuttavia l'esperienza dimostra che, se il numero **n** di prove è abbastanza grande, i valori delle frequenze relative differiscono di poco l'uno dall'altro.

Aumentando il numero delle prove, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza relativa di un evento assume valori che si avvicinano sempre di più a quelli della probabilità matematica. Per questo motivo è chiamata probabilità empirica di un evento o probabilità a posteriori o probabilità sperimentale in contrapposizione a quella classica detta probabilità teorica o *probabilità a priori* o **probabilità matematica**. Concludendo possiamo affermare che quando il numero delle prove effettuate è abbastanza grande (teoricamente infinito), il valore di $\mathbf{f}(\mathbf{E})$ tende a stabilizzarsi attorno ad un valore ben preciso che si discosta poco dalla probabilità matematica $\mathbf{p}(\mathbf{E})$ dell'evento $\mathbf{E}$. Il risultato sperimentale ottenuto rappresenta la legge empirica del caso o legge dei grandi numeri: << su un numero molto grande di prove, effettuate tutte nelle medesime condizioni, la frequenza $\mathbf{f}(\mathbf{E})$ con la quale si presenta un certo evento **E** assume generalmente valori molto prossimi a quello della probabilità $\mathbf{p}(\mathbf{E})$ dello stesso evento e tale approssimazione è tanto migliore quanto più elevato è il numero delle prove effettuate>>

Elogio della matematica

Nessun altro studio richiede meditazione più pacata;

nessun altro meglio induce ad essere cauti nell'affermare,

semplici ed ordinati nell'argomentare,

precisi e chiari nel dire;

e queste semplicissime qualità sono sì rare

che possono bastare da sole ad elevare chi ne è dotato

molto al di sopra della maggioranza degli uomini.

Perciò io esorto a studiare matematica

pur chi si accinga a divenire avvocato o economista,

filosofo o letterato; perché io credo

e spero che non gli sarà inutile sapere bene ragionare

e chiaramente esporre .

Alessandro Padoa