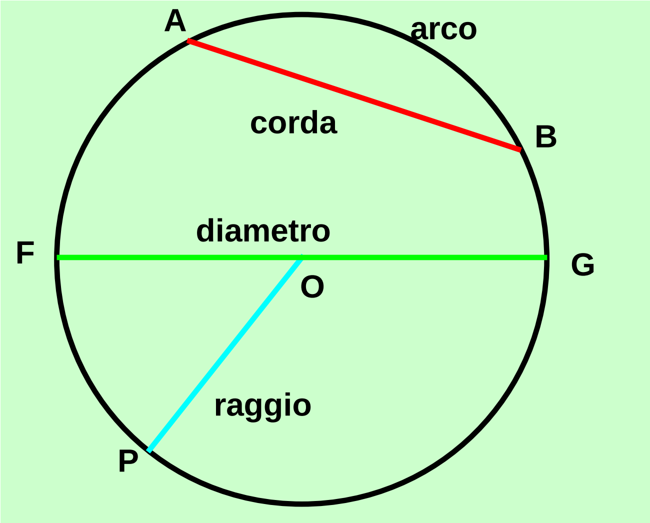
Unità 1

Circonferenza e cerchio: le misure

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.

Raggio di una circonferenza è il segmento che unisce un punto qualsiasi della circonferenza con il centro.

La corda è un segmento che unisce due punti della circonferenza .



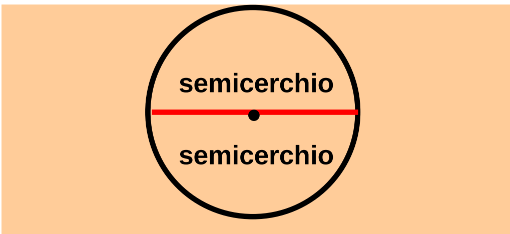
Diametro è una qualsiasi corda passante per il centro della circonferenza . Ogni diametro è uguale al doppio del raggio.

L'arco è una parte di circonferenza delimitata da due suoi punti. Un qualsiasi diametro divide la circonferenza in due parti uguali ciascuna delle quali dicesi semicirconferenza.

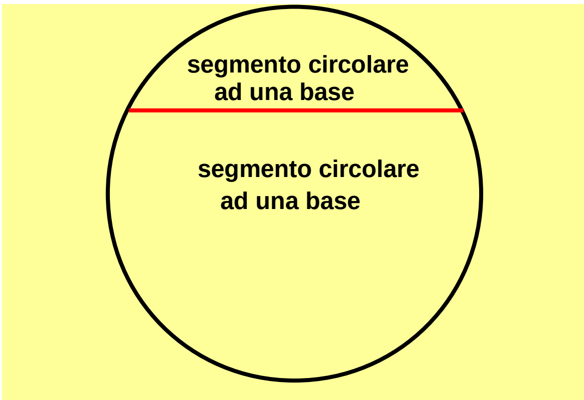
Il cerchio è il luogo geometrico dei punti del piano le cui distanze dal centro sono minori o uguali al raggio. Diversamente possiamo definire il cerchio come la parte di piano delimitata dalla circonferenza.

Osservazione: Mentre la circonferenza è una linea il cerchio è una superficie , cioè una parte di piano .

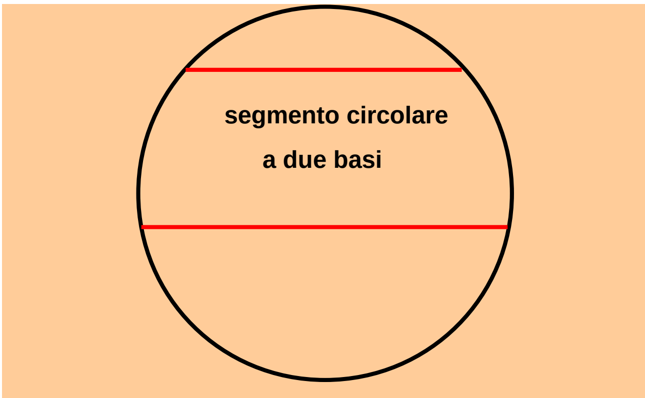
Un qualsiasi diametro divide il cerchio in due parti uguali, ciascuna delle quali prende il nome di semicerchio.



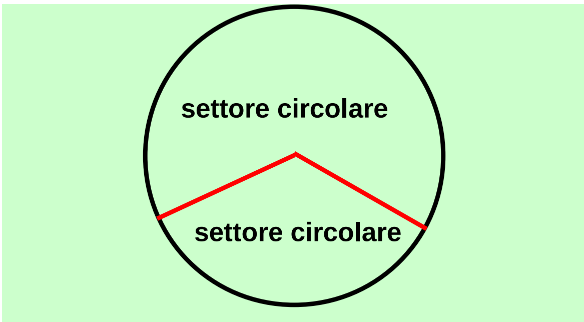
Dicesi segmento circolare ad una base la parte di cerchio delimitata da un arco e dalla corda sottesa.



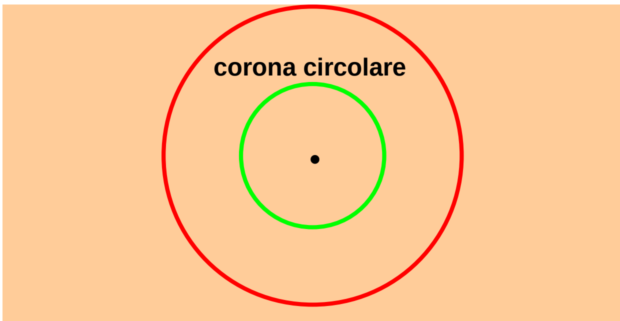
Dicesi segmento circolare a due basi la parte di cerchio delimitata da due corde parallele e dagli archi aventi gli estremi sulle corde stesse.



Dicesi settore circolare la parte di cerchio delimitata da un arco e da due raggi passanti per gli estremi dell'arco.



Due circonferenze si dicono concentriche se hanno lo stesso centro. La corona circolare è la parte di piano delimitata da due circonferenze concentriche.



Misura della circonferenza

Rettificare la circonferenza significa trovare un segmento lungo quando la circonferenza. Si può dimostrare che il rapporto fra la lunghezza della circonferenza e la lunghezza del suo diametro $d = 2r$ (con r raggio della circonferenza) è costante, cioè è sempre lo stesso numero qualunque sia la circonferenza. Questo numero è indicato col simbolo π che è un numero irrazionale, cioè un numero che non può essere espresso mediante una frazione fra numeri interi. Un suo valore numerico approssimato è $3{,}14$.

$$\frac{C}{d} = \pi \ , \quad \frac{C}{2r} = \pi \ , \quad C = d\pi \ , \quad C = 2\pi r \ , \quad d = \frac{C}{\pi} \ , \quad r = \frac{C}{2\pi}$$

Misura di un arco di circonferenza

Per determinare la misura ℓ di un arco di circonferenza corrispondente ad un data angolo al centro di ampiezza $\alpha°$ basta applicare la seguente proporzione: $\ell : 2\pi r = \alpha° : 360°$

Si ottengono le seguenti formule inverse: $\ell = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi r \qquad \alpha° = \frac{\ell}{\pi r} \cdot 180° \qquad r = \frac{180°}{\alpha°} \cdot \frac{\ell}{\pi}$

Area del cerchio

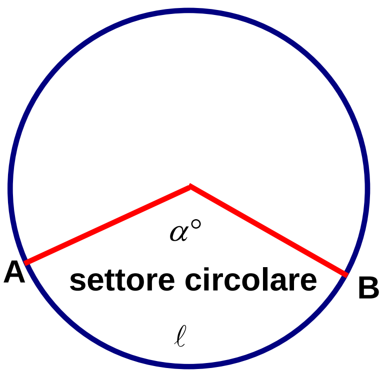
Per calcolare l'area del cerchio basta applicare la seguente formula: $A = \pi r^2 \qquad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

Area di un settore circolare

Per determinare l'area di un settore circolare individuato dall'angolo al centro $\alpha°$ basta applicare la seguente proporzione: $A : \pi r^2 = \alpha° : 360°$

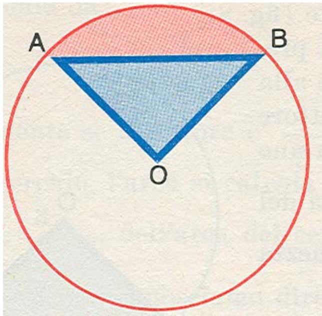
Si ottengono le seguenti formule inverse:

$$A = \frac{\alpha°}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot r \qquad \alpha° = \frac{A}{\pi r^2} \cdot 360° \qquad r = \sqrt{\frac{360°}{\alpha°} \cdot \frac{A}{\pi}}$$

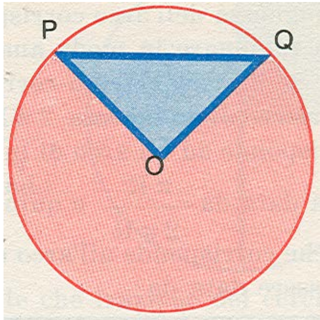


ℓ = arco di circonferenza individuato dall'angolo al centro $\alpha°$.

Area di un segmento circolare ad una base

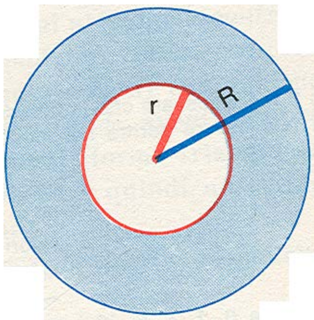


Regola N°1: L'area di un segmento circolare ad una base **non contenente il centro O** è uguale alla differenza fra l'area del settore circolare corrispondente allo stesso arco e l'area del corrispondente triangolo isoscele ABO



Regola N°2: L'area di un segmento circolare ad una base **contenente il centro O** è uguale alla somma dell'area del settore circolare corrispondente allo stesso arco e l'area del corrispondente triangolo isoscele PQO.

Area di una corona circolare



L'area di una corona circolare si ottiene sottraendo dall'area del cerchio di **raggio maggiore** l'area del cerchio di **raggio minore**.

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

Unità 2
Rette e piani nello spazio

Le figure solide

Nello spazio a tre dimensioni le figure geometriche prendono il nome di solidi e sono caratterizzati da tre dimensioni: la lunghezza, la larghezza e l'altezza.

Rette e piani nello spazio

Sappiamo già che il punto, la retta ed il piano sono enti geometrici primitivi e, come tali, non sono definibili.

Postulato N°1**:** Nello spazio esistono infiniti punti, infinite rette, infiniti piani.

Indicheremo i punti dello spazio con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino **$A, B, C, \cdots, P, Q$**

le rette con le lettere minuscole dell'alfabeto latino **$a, b, c, d, \cdots, r, s$**

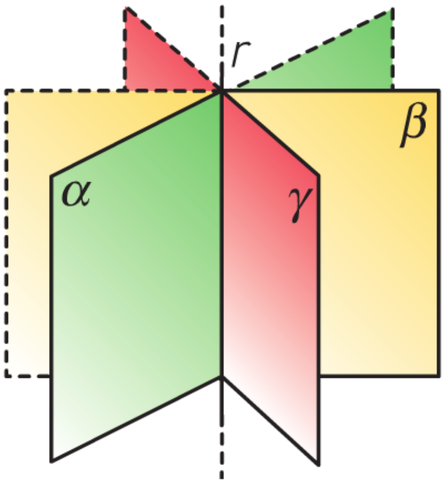
i piani con le lettere minuscole dell'alfabeto greco **$\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$**

Postulato N°2: per tre punti non allineati passa un solo piano

Postulato N°3: Se una retta ha due punti in comune con un piano, essa giace tutta su quel piano.

Proprietà del piano

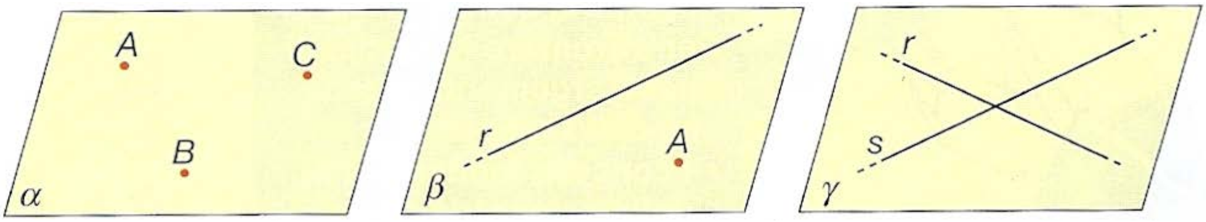
Per una retta passano infiniti piani



Un piano è completamente individuato da una delle 4 seguenti condizioni:

1) tre punti distinti e non allineati **2)** da una retta e da un punto non appartenente ad essa

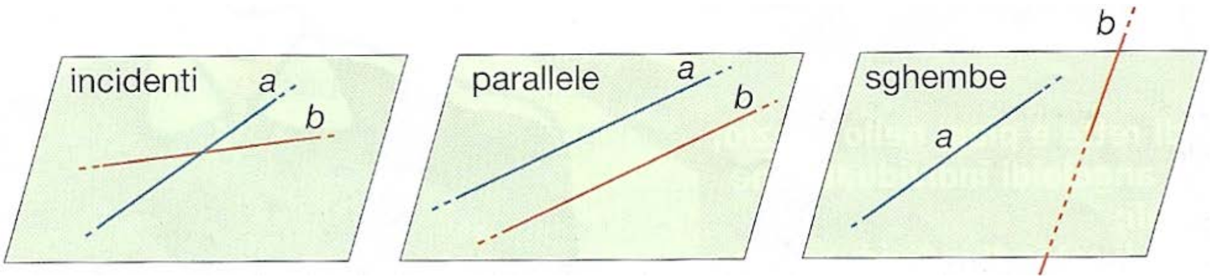
3) da due rette incidenti **4)** da due rette parallele.



Definizione: ogni piano divide lo spazio in due parti, ciascuna delle quali prende il nome di semispazio. Il piano si dice origine dei due semispazi, i quali si dicono uno **opposto** dell'altro.

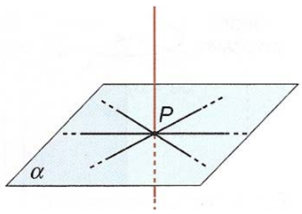
Posizioni reciproche di due rette nello spazio

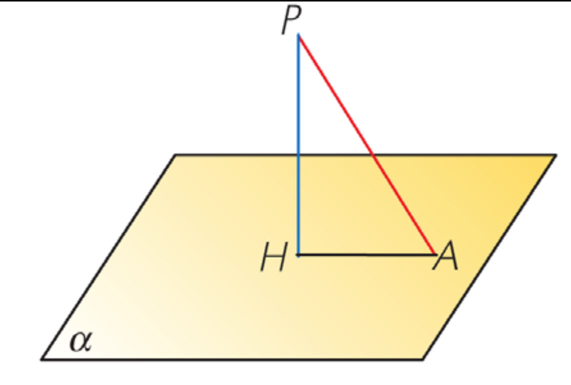
Due rette a e b nello spazio possono essere: • complanari se appartengono allo stesso piano; le rette complanari, a loro volta, possono essere a) incidenti se hanno un solo punto in comune b) parallele se non hanno alcun punto in comune c) sghembe se non appartengono allo stesso piano e non hanno alcun punto in comune.



Definizione: Una retta si dice **perpendicolare** ad un piano in un suo punto P, se è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per A.

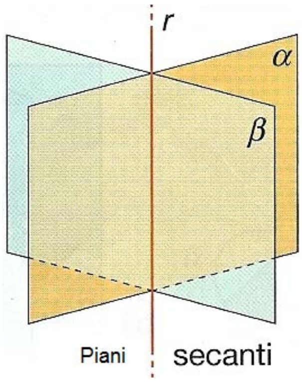
Il punto P è detto **piede della perpendicolare**. Una retta che incontra un piano e non è perpendicolare ad esso, si dice **obliqua** al piano.



Definizione: Si chiama **distanza di un punto P da un piano** il segmento di perpendicolare **PH** condotto da quel punto al piano. Tale segmento ha come estremi il punto ed il piede della perpendicolare.	

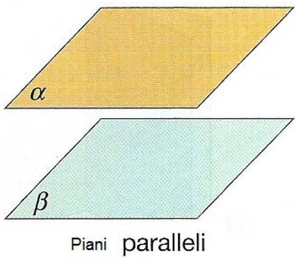
Posizioni reciproche di due piani nello spazio

Definizione: Due piani si dicono **incidenti** o **secanti** quando hanno in comune una retta, che prende il nome di **retta d'intersezione dei due piani**.

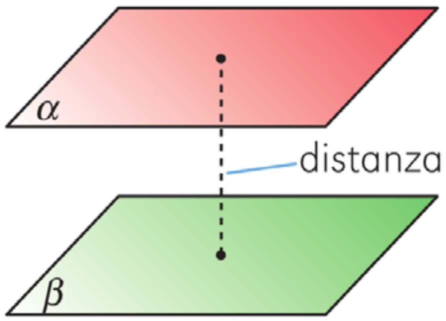


Definizione: Due piani si dicono **paralleli** quando non hanno alcun punto in comune, oppure quando sono coincidenti.

Corollario N°1: Per un punto dello spazio si può condurre un solo piano parallelo ad un piano dato

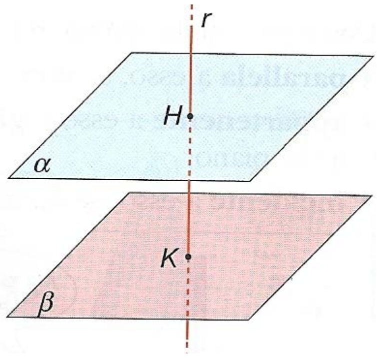


Definizione: Si chiama **distanza fra due piani paralleli** il segmento di perpendicolare condotto da un punto qualsiasi di un piano all'altro piano.



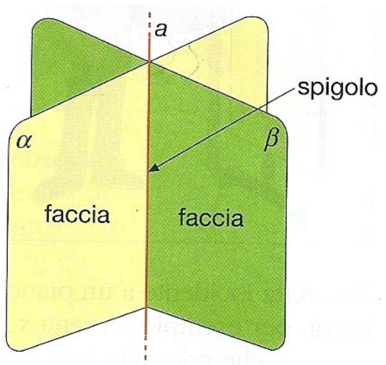
Distanza tra due piani paralleli

Consideriamo due piani α e β **paralleli**. Da un punto H del piano α traccio la retta r perpendicolare al piano β e sia K il punto d'intersezione fra la retta r ed il piano β. Il segmento HK è la **distanza** fra i due piani paralleli α e β.

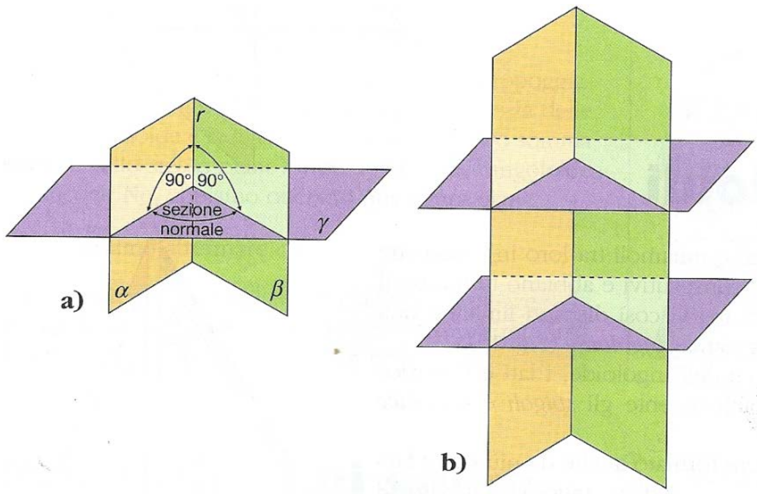


Diedri e piani perpendicolari

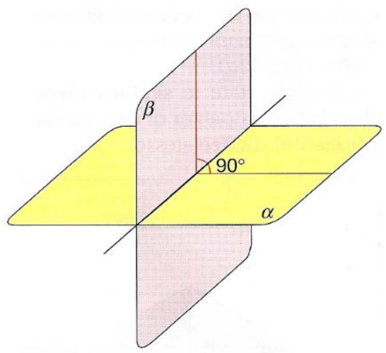
Definizione: Si dice **angolo diedro** o semplicemente **diedro** ciascuna delle due parti in cui lo spazio è diviso da due semipiani aventi la stessa origine. I due semipiani si dicono le **facce** del diedro, mentre la retta, origine dei due semipiani, prende il nome di **spigolo** del diedro.



Definizione: Si dice **sezione normale** di un diedro l'angolo che si ottiene sezionandolo con un piano perpendicolare allo spigolo.



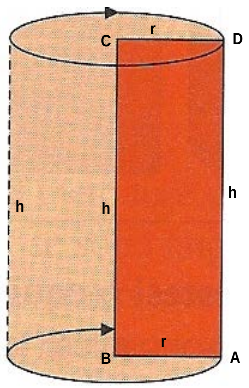
Definizione Due piani si dicono perpendicolari se incontrandosi formano quattro diedri uguali, cioè **retti**.



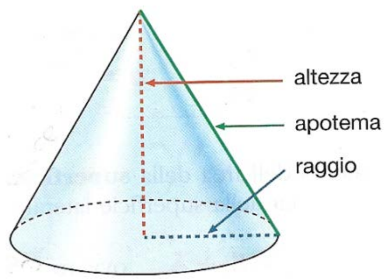
Unità 3 : l'estensione solida

I solidi sono figure geometriche che occupano una parte dello spazio delimitata da una superficie chiusa. Essi possono essere poliedri o solidi a superficie curva se il contorno è una superficie curva. I solidi di rotazione sono quelli generati dalla rotazione di una figura piana attorno ad un suo lato. Sono solidi di rotazione il cilindro, il cono e la sfera.

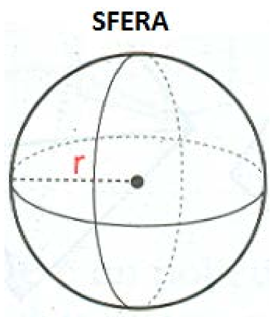
cilindro



cono

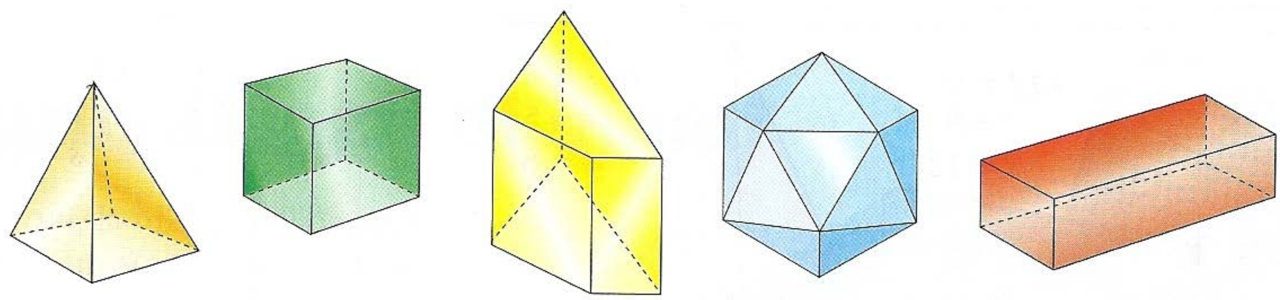


sfera

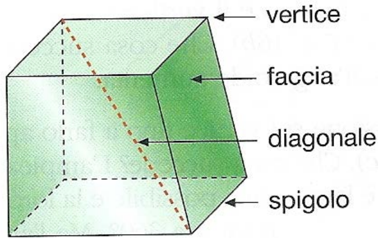


I poliedri

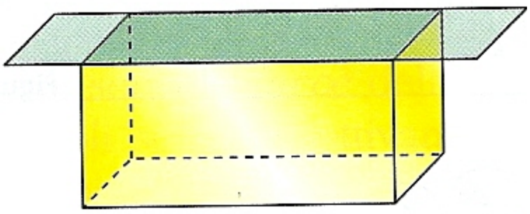
Definizione di poliedro: Dicesi poliedro la regione finita di spazio delimitata da un numero finito di poligoni convessi, giacenti su piani diversi ed aventi a due a due un lato in comune.

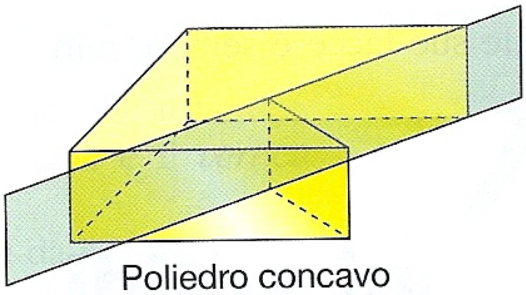


I poligoni che delimitano il poliedro, i loro vertici si chiamano rispettivamente facce, vertici, spigoli del poliedro. Ogni segmento che unisce due vertici non appartenenti alla stessa faccia prende il nome di diagonale del poliedro.



L'insieme delle facce si dice superficie del poliedro. Un poliedro si dice convesso, se ogni sua faccia appartiene ad un piano che non interseca il poliedro, si dice concavo se almeno una sua faccia appartiene ad un piano che interseca il poliedro.


Poliedro convesso


Poliedro concavo

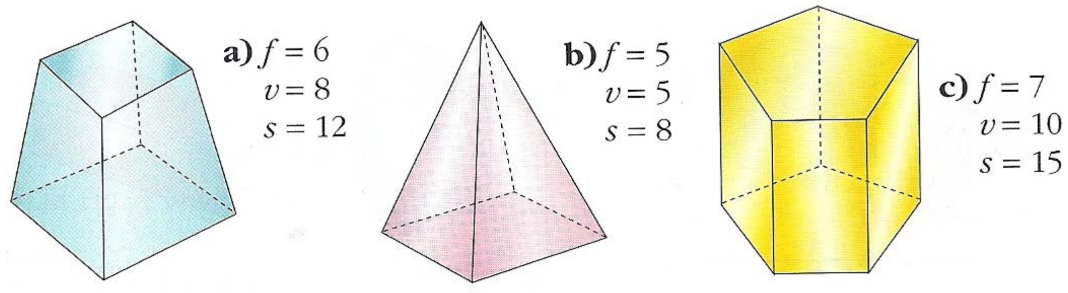
Un poliedro non può avere meno di quattro facce. Il poliedro prende il nome di tetraedro se ha 4 facce, pentaedro se ha 5 facce, esaedro se ha 6 facce, e così di seguito.

Definizione: Diagonale di un poliedro è il segmento che congiunge due vertici che non appartengono alla stessa faccia.

Elementi caratteristici di ogni poliedro sono gli angoli piani (cioè gli angoli di ciascuna faccia), i diedri (cioè gli angoli formati dalle facce che escono da ogni spigolo).

Teorema: In ogni poliedro convesso il numero delle facce più il numero dei vertici è uguale al numero degli spigoli aumentato di due. $f+v=s+2$ dove f rappresenta il numero complessivo delle facce del poliedro, v il numero complessivo dei vertici ed s il numero complessivo degli spigoli. Tale formula prende il nome di relazione di Eulero.

Verifica della relazione di Eulero per alcuni poliedri.



a) $f + v = 14$
$s + 2 = 14$

b) $f + v = 10$
$s + 2 = 10$

c) $f + v = 17$
$s + 2 = 17$

Poliedri regolari

Definizione: Un poliedro si dice regolare quando le sue facce sono poligoni regolari uguali fra loro e tutti i diedri sono uguali fra loro.

L'estensione di un solido è la parte di spazio che occupa il solido. Il volume di un solido è il numero che indica quante volte l'unità di misura scelta è contenuta nel solido considerato.

L'unità principale per la misura dei volumi è il metro cubo (**m**^{3}) che corrisponde al volume di un cubo che ha lo spigolo di un metro.

La seguente tabella ci indica quali sono i multipli ed i sottomultipli del metro cubo (**m**^{3}).

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

← multipli — sottomultipli →

Peso specifico, peso e volume di un corpo

Il peso di un corpo si misura in chilogrammi (*kg*). La seguente tabella ci fornisce i multipli ed i sottomultipli del chilogrammo (*kg*).

$1kg = 10 hg$ $1hg = 10^{-1} kg = 0,1 kg$ $1kg = 10^2 dag = 100 dag$ $1dag = 10^{-2} kg = 0,01 kg$

$1kg = 10^3 g = 1000 g$ $1g = 10^{-3} kg = 0,001 kg$ $1kg = 10^4 dg = 10000 dg$ $1dg = 10^{-4} kg = 0,0001 kg$

$1kg = 10^5 cg = 100000 cg$ $1cg = 10^{-5} kg = 0,00001 kg$

$1kg = 10^6 mg = 1000000 mg$ $1mg = 10^{-6} kg = 0,000001 kg$

$1Mg = 10^3 kg = 1000 kg$ $1kg = 10^{-3} Mg = 0,001 MG$

Il peso specifico p_s di una sostanza è il rapporto tra il suo peso ed il suo volume: $p_s = \frac{P}{V}$

Valgono anche le seguenti formule inverse: $P = p_s \cdot V$ $V = \frac{P}{p_s}$

Due solidi sono equivalenti se occupano la stessa parte di spazio, cioè se hanno la stessa estensione. Solidi equivalenti hanno lo steso volume.

Grandezze	Unità di misura fondamentale	Multipli e sottomultipli dell'unità fondamentale
LUNGHEZZE	METRO (m)	**Multipli** • **miriametro** (Mm) $1\,Mm = 10.000\,m = 10^4\,m$ • **chilometro** (km) $1km = 1.000m = 10^3\,m$ • **ettometro** (hm) $1hm = 100m = 10^2\,m$ • **decametro** (dam) $1dam = 10m$ **Sottomultipli** • **decimetro** (dm) $1dm = 0{,}1m = 10^{-1}\,m$ • **centimetro** (cm) $1cm = 0{,}01m = 10^{-2}\,m$ • **millimetro** (mm) $1mm = 0{,}001m = 10^{-3}\,m$ • **micron** (μ) $1\mu = 0{,}000001m = 10^{-6}\,m$ • **ångström (Å)** $1\text{Å} = 0{,}0000000001m = 10^{-9}\,m$
SUPERFICI	metro quadrato (m^2)	**Multipli** • **chilometro quadrato** (km^2) $1km^2 = 1.000.000m^2 = 10^6\,m^2$ • **ettometro quadrato** (hm^2) $1hm^2 = 10.000\ m^2 = 10^4\,m^2$ • **decametro quadrato** (dam^2) $1dam^2 = 100\ m^2 = 10^2\,m^2$ **Sottomultipli** • **decimetro quadrato** (dm^2) $1dm^2 = 0{,}01m^2 = 10^{-2}\,m^2$ • **centimetro quadrato** (cm^2) $1cm^2 = 0{,}0001m^2 = 10^{-4}\,m^2$ • **millimetro quadrato** (mm^2) $1mm^2 = 0{,}000001m^2 = 10^{-6}\,m^2$

Grandezze	Unità di misura fondamentale	Multipli e sottomultipli dell'unità fondamentale
VOLUMI	METRO CUBO (m^3)	**Multipli** • **chilometro cubo** (km^3) $1km^3 = 1.000.000.000m^3 = 10^9 m^3$ • **ettometro cubo** (hm^3) $1hm^3 = 1.000.000m^3 = 10^6 m^3$ • **decametro cubo** (dam^3) $1dam^3 = 1.000m^3 = 10^3 m^3$ **Sottomultipli** • **decimetro cubo** (dm^3) $1dm^3 = 0{,}001m^3 = 10^{-3} m^3$ • **centimetro cubo** (cm^3) $1cm^3 = 0{,}000001m^3 = 10^{-6} m^3$ • **millimetro cubo** (mm^3) $1mm^3 = 0{,}000000001m^3 = 10^{-9} m^3$
CAPACITA'	LITRO (ℓ) E' il volume di un decimetro cubo e coincide col volume di 1 kg di acqua distillata a 4°C	**Multipli** • **ettolitro** ($h\ell$) $1h\ell = 100\ell = 100dm^3$ • **decalitro** ($da\ell$) $1da\ell = 10\ell = 10dm^3$ **Sottomultipli** • **decilitro** ($d\ell$) $1d\ell = 0{,}1\ell = 100cm^3$ • **centilitro** ($c\ell$) $1c\ell = 0{,}01\ell = 10cm^3$ • **millilitro** ($m\ell$) $1m\ell = 0{,}001\ell = 1cm^3$

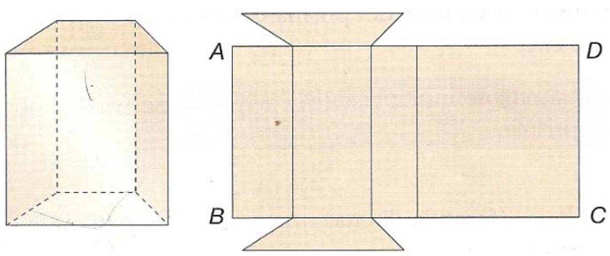
Grandezze	Unità di misura fondamentale	Multipli e sottomultipli dell'unità fondamentale
Pesi	**grammo** (g)	**Multipli** • **tonnellata** (**t**) $1\,t = 1.000.000\,g = 10^6\,g = 1000\,kg = 10^3\,kg$ • **quintale (q)** $1\,q = 100.000\,g = 10^5\,g = 100\,kg = 10^2\,kg$ • **miriagrammo (Mg)** $1\;Mg = 10.000\,g = 10^4\,g = 10\,kg = 10\,kg$ • **chilogrammo (kg)** $1kg = 1000\,g = 10^3\,g$ • **ettogrammo (hg)** $1hg = 100\,g = 10^2\,g$ **Sottomultipli** • **decigrammo (dg)** $1dg = 0{,}1g = 10^{-1}\,g$ • **centigrammo (cg)** $1cg = 0{,}01g = 10^{-2}\,g$ • **milligrammo (mg)** $1mg = 0{,}001g = 10^{-3}\,g$
Tempi	**giorno (g)**	• **secolo (s)** $1s = 100a$ • **anno commerciale (a)** $1a = 12ms = 360g$ • **mese commerciale (ms)** $1ms = 30g$ • **ora (h)** $1h = \frac{1}{24}g$ • **minuto primo** (**m**) $1m = \frac{1}{60}h$ • **minuto secondo** (s) $1s = \frac{1}{60}m = \frac{1}{3600}h$

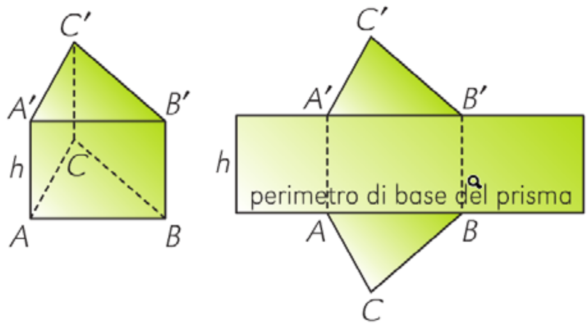
L'anno solare risulta uguale a $365^g\,5^h\,48^m\,47^s$. L'anno civile è di **365 giorni** (o 366 giorni negli anni bisestili)

Il prisma

Il prisma è un poliedro limitato da due poligoni uguali e paralleli, le basi, e da tanti parallelogrammi, le facce laterali, quanti solo i lati del poligono di base. Se i poligoni di base sono poligoni regolari il prisma si dice regolare e le facce laterali sono rettangoli congruenti. I lati della base prendono il nome di spigoli di base, i lati delle facce laterali si chiamano spigoli laterali. Se gli spigoli sono perpendicolari alle basi il prisma è retto, altrimenti è obliquo.

Per calcolare la misura della superficie laterale consideriamo un prisma retto ed il suo sviluppo.





La superficie laterale del prisma coincide con la superficie del rettangolo $ABCD$ dello sviluppo: questo rettangolo ha la base uguale al perimetro di base del prisma e l'altezza uguale all'altezza del prisma. Resta così giustificata la seguente regola:

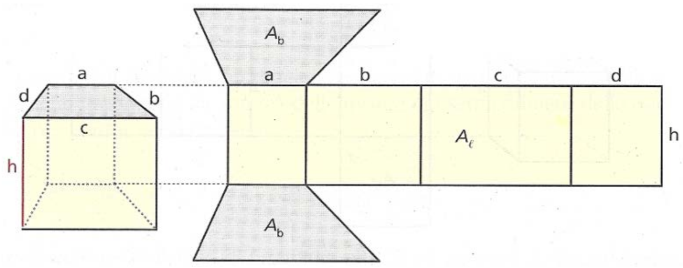
L'area della superficie laterale A_ℓ di un prisma retto è uguale al prodotto della misura del perimetro $2p$ della sua base per la misura della sua altezza h.

$$A_\ell = 2p \cdot h \qquad 2p = \frac{A_\ell}{h} \qquad h = \frac{A_\ell}{2p}$$

Per ottenere l'area della superficie totale del prisma retto, basta addizionare all'area della superficie laterale la somma delle aree delle due basi (che sono congruenti).

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b = 2p \cdot h + 2 \cdot A_b \qquad A_\ell = A_t - 2 \cdot A_b \qquad A_b = \frac{A_t - A_\ell}{2}$$

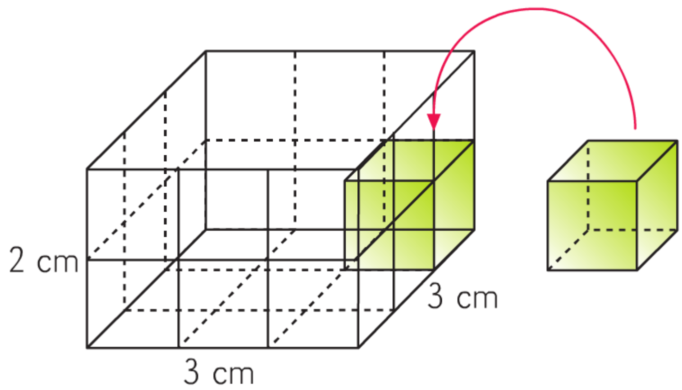
Lo sviluppo della superficie di un prisma retto



Volume del prisma

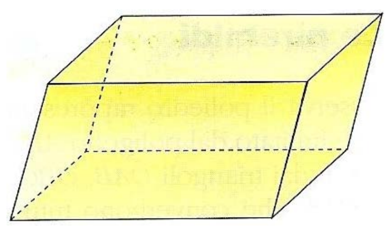
Il volume di un prisma è uguale al prodotto dell'area della superficie della sua base per la misura dell'altezza. $\mathbf{V = A_b \cdot h}$ $\mathbf{A_b = \frac{V}{h}}$ $\mathbf{h = \frac{V}{A_b}}$

$\mathbf{V = 18\,cm^3}$ è ll volume della figura, in quanto contiene **18** cubi unitari, ognuno dei quali ha il lato uguale ad un centimetro.



Il parallelepipedo

Definizione: Si chiama parallelepipedo un prisma avente per basi due parallelogrammi. Le facce di un parallelepipedo sono **parallelogrammi**. Nel parallelepipedo vi sono 6 facce, **8 vertici**, e **12 spigoli**. Si dicono **opposte** le facce che non hanno spigoli comuni. Gli spigoli del parallelepipedo sono a 4 a 4 uguali e paralleli.

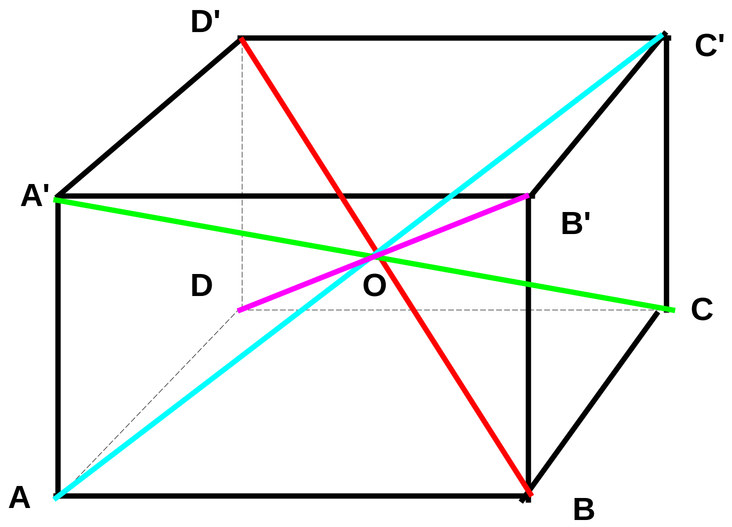


Un parallelepipedo si dice retto se ha gli spigoli laterali perpendicolari alle basi in caso contrario si dice obliquo.

Teorema: In ogni parallelepipedo le facce opposte sono uguali e parallele, e le 4 diagonali passano per uno stesso punto che dimezza ciascuna di esse.

Teorema

In ogni parallelepipedo le facce opposte sono uguali e parallele, e le 4 diagonali passano per uno stesso punto che dimezza ciascuna di esse.

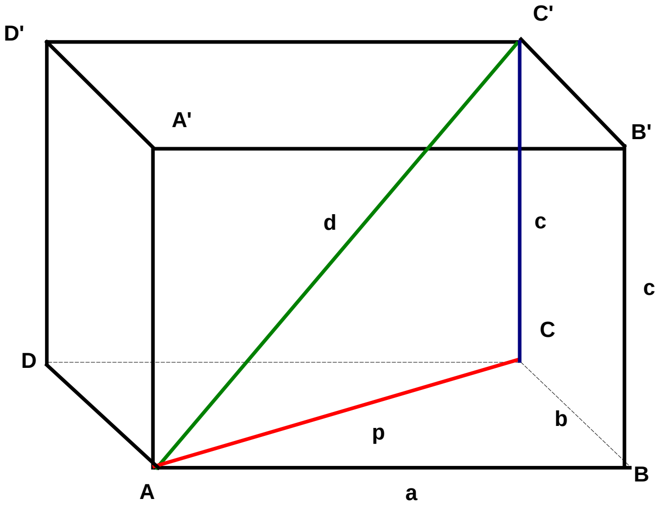


Definizione

Si chiama parallelepipedo rettangolo **un parallelepipedo retto le cui basi sono dei rettangoli.**

Un parallelepipedo è delimitato da 8 rettangoli.

Teorema**:** Nel parallelepipedo rettangolo le diagonali sono uguali.

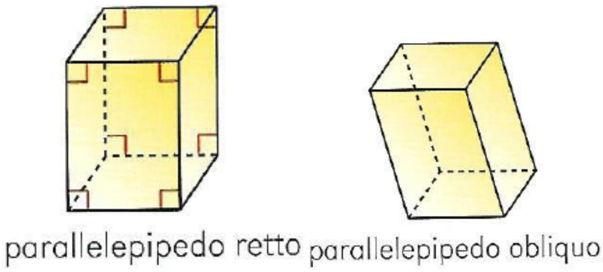


La misura della diagonale del parallelepipedo rettangolo

La misura **d** della diagonale di un parallelepipedo rettangolo si ottiene estraendo la radice quadrata della somma dei quadrati delle misure delle sue tre dimensioni. In simboli abbiamo:

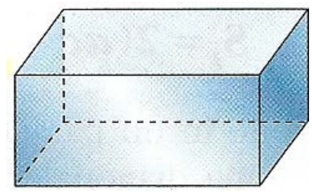
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \qquad \mathbf{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2 - d^2} \qquad b = \sqrt{a^2 + c^2 - d^2} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - d^2}$$

Un parallelepipedo si dice retto se ha gli spigoli laterali perpendicolari alle basi, in caso contrario si dice obliquo.



Area del parallelepipedo rettangolo

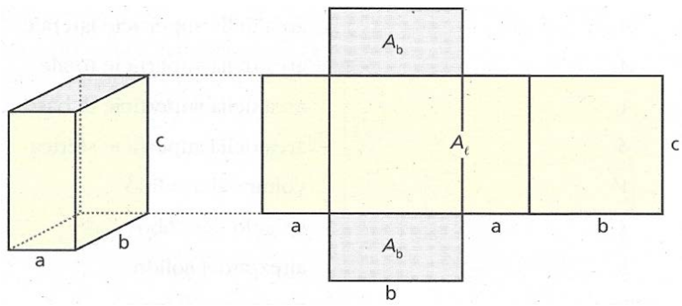
Il parallelepipedo è un prisma le cui basi sono dei parallelogramma. Esso è retto se tutte le facce sono perpendicolari alle basi, è rettangolo se è retto e le sue basi sono dei rettangoli per cui tutte e sei le facce sono uguali e parallele a due a due.



L'area della superficie laterale di un parallelepipedo retto si ottiene moltiplicando il perimetro di base per la misura dell'altezza.

L'area della superficie totale è data dalla somma dell'area della superficie laterale e dell'area delle due basi.

Lo sviluppo della superficie di un parallelepipedo rettangolo

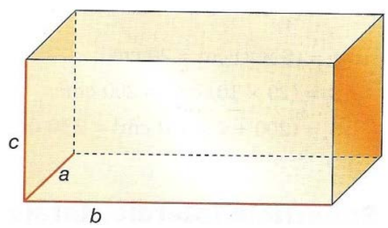


Il volume si ottiene moltiplicando l'area di base per la misura dell'altezza.

$$A_\ell = 2p \cdot h \qquad 2p = \frac{A_\ell}{h} \qquad h = \frac{A_\ell}{2p} \qquad A_t = A_\ell + 2A_b \qquad A_\ell = A_t - 2A_b \qquad A_b = \frac{A_t - A_\ell}{2}$$

Indicando con a, b, c le tre dimensioni del parallelepipedo rettangolo abbiamo:

$$A_b = a \cdot b \qquad 2p = 2(a+b) \qquad h = c$$



$$A_\ell = 2(ac+bc) = 2(a+b)\cdot c \qquad A_t = 2(ab+ac+bc) \qquad V = a\cdot b\cdot c$$

Volume del parallelepipedo rettangolo

Il volume del parallelepipedo rettangolo si ottiene moltiplicando l'area della base per la misura dell'altezza. $V = A_b \cdot h \quad A_b = \frac{V}{h} \quad h = \frac{V}{A_b}$

Se indichiamo con a e b le misure delle dimensioni della base e con c la misura dell'altezza del parallelepipedo, la formula del volume può essere scritta così: $V = a\cdot b\cdot c$

Il volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle misure delle sue tre dimensioni.

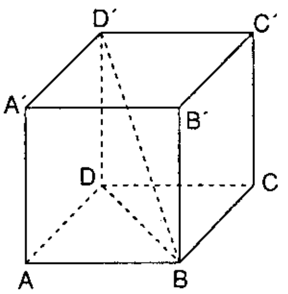
Il cubo: diagonale e aree

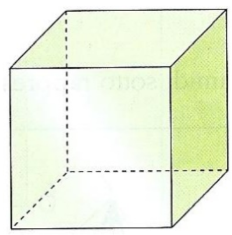
Definizione: Si chiama cubo un parallelepipedo rettangolo avente le tre dimensioni uguali.

Si tratta di un parallelepipedo retto avente per facce 6 quadrati.

Risulta: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \ell^2 + \ell^2 + \ell^2 = 3\ell^2$

$d = \sqrt{3\ell^2} = \ell \cdot \sqrt{3} \qquad \ell = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} d$

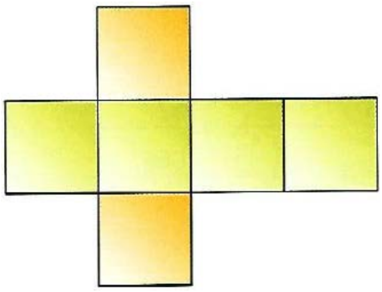


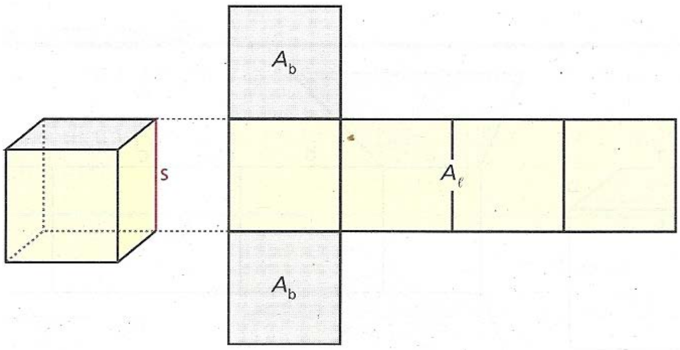


Per un cubo, essendo $a = b = c = \ell$ abbiamo: $A_b = \ell^2 \quad A_\ell = 4\cdot\ell^2 \quad A_t = 6\,\ell^2$

Infatti un cubo ha per facce sei quadrati congruenti dei quali quattro costituiscono la superficie laterale. Le formule inverse sono: $\ell = \sqrt{A_b} \quad \ell = \sqrt{\frac{S_\ell}{4}} \quad \ell = \sqrt{\frac{S_t}{6}}$

Lo sviluppo della superficie di un cubo



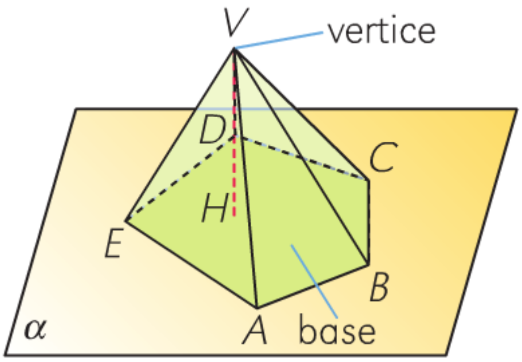


Volume del cubo

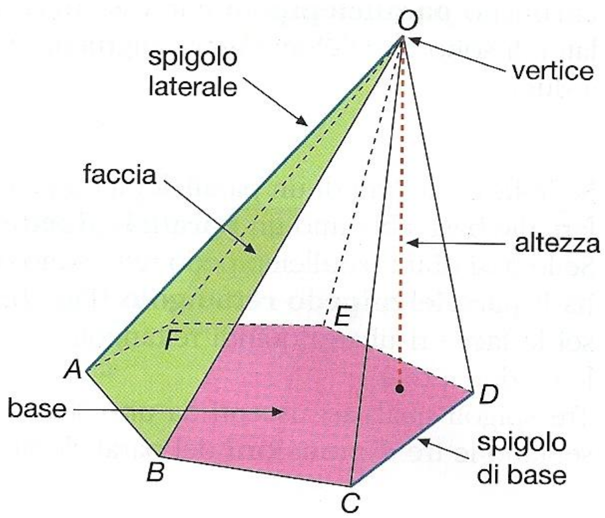
Il volume di un cubo è uguale al cubo della misura del suo lato $\mathbf{V} = \ell^3$ $\ell = \sqrt[3]{\mathbf{V}}$

La piramide

La piramide è un poliedro avente per base un poligono qualsiasi e per facce laterali tanti triangoli quanti sono i lati del poligono di base, aventi un punto in comune, detto vertice della piramide.



I triangoli ABV, BCV, CDV, DEV, EAV sono le facce laterali ed i loro lati sono gli spigoli **della piramide. L'insieme delle facce laterali costituisce la** superficie laterale, e, aggiungendo ad essa la base, si ha la superficie totale della piramide. La piramide prende il nome dal numero dei lati del poligono di base. Avremo piramidi triangolari, quadrangolari …… La piramide triangolare si dice anche tetraedro, e si può considerare come piramide in 4 modi diversi perché si può assumere come base una qualsiasi delle sue facce.

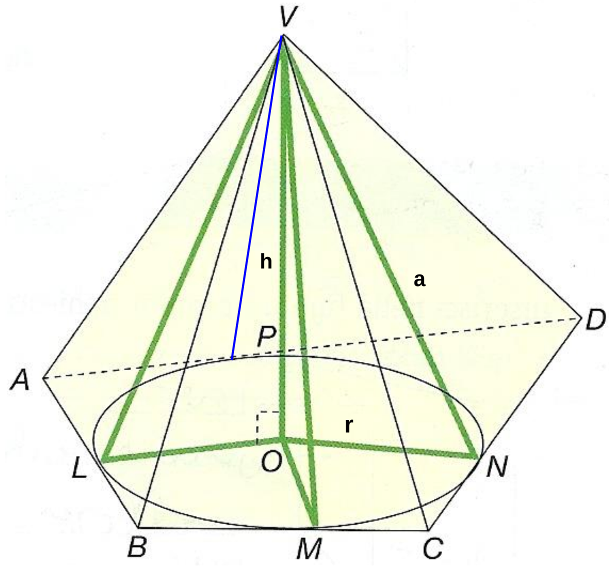


Dicesi altezza di una piramide la distanza del suo vertice dal piano contenente la base. In definitiva **la piramide è un poliedro** delimitato da un poligono, detto **base**, e da tanti triangoli (facce laterali) quanti sono i lati del poligono di base. I lati della base sono gli spigoli di base della piramide. I segmenti OA, OB, OC, OD, OE, OF sono gli spigoli laterali e la distanza del vertice dalla base è l'altezza della piramide.

Anche le piramidi sono classificate mediante i poligoni di base. Se la base è un triangolo, la piramide si dice triangolare, se è un quadrilatero abbiamo la piramide quadrangolare e così di seguito.

Dicesi altezza di una piramide la distanza del suo vertice dal piano contenente la base. In definitiva **la piramide è un poliedro** delimitato da un poligono, detto base, e da tanti triangoli (facce laterali) quanti sono i lati del poligono di base.

I lati della base sono gli spigoli di base della piramide. I segmenti OA, OB, OC, OD, OE, OF sono gli spigoli laterali e la distanza del vertice dalla base è l'altezza della piramide. Anche le piramidi sono classificate mediante i poligoni di base. Se la base è un triangolo, la piramide si dice triangolare, se è un quadrilatero abbiamo la piramide quadrangolare e così di seguito.



Nella piramide della figura il poligono di base è circoscritto ad una circonferenza ed il piede dell'altezza coincide col centro della circonferenza. La piramide che gode di questa proprietà dicesi Piramide Retta. Le altezze delle facce laterali, VL , VM , VN , VP sono uguali ed una qualsiasi di esse è l'apotema della piramide.

a = apotema della piramide

h = altezza della piramide

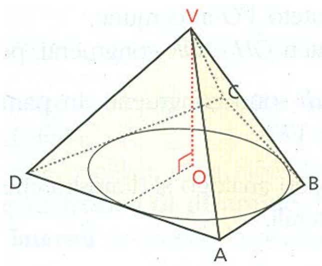
r = raggio della circonferenza inscritta nel poligono di base .

Definizione: Una piramide si dice retta se nel poligono di base possiamo inscrivere una circonferenza il cui centro coincide col piede dell'altezza della piramide.

Teorema: Le altezze delle facce laterali di una piramide retta sono uguali. Questo teorema giustifica la seguente **definizione**: si chiama apotema di una piramide retta l'altezza di una delle sue facce laterali. Per una piramide retta vale la seguente relazione:

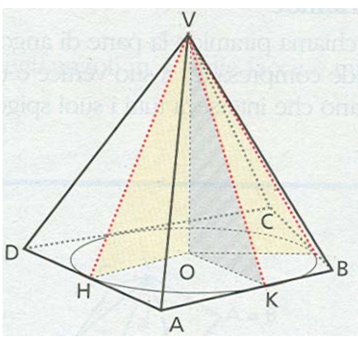
$$a^2 = h^2 + r^2 \qquad a = \sqrt{h^2 + r^2} \qquad h = \sqrt{a^2 - r^2} \qquad r = \sqrt{a^2 - h^2}$$

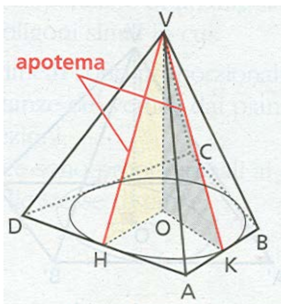
Piramide retta



Il centro O della circonferenza è la proiezione ortogonale del vertice V.

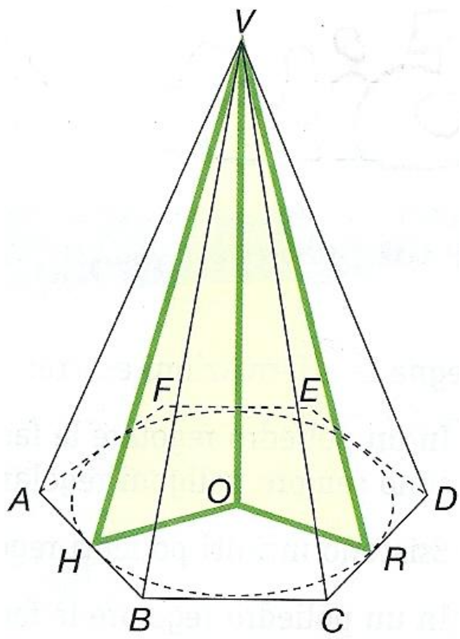
Il segmento VO è l'altezza della piramide.





Apotema di un a piramide retta

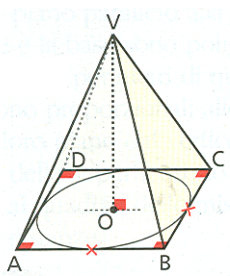
In una piramide retta le altezze delle facce laterali passano per i punti di tangenza dei lati di base con la circonferenza inscritta e sono tra loro uguali.



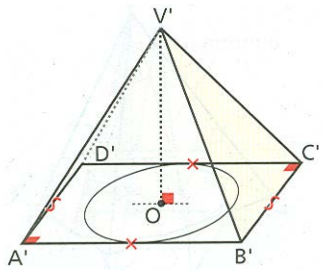
Definizione: Una piramide si dice regolare se è retta ed ha per base un poligono regolare.

Teorema: Gli spigoli laterali di una piramide regolare sono **uguali.**

Teorema: Le facce laterali di una piramide regolare sono triangoli isosceli tutti uguali fra loro e, di conseguenza, sono uguali fra loro tutti gli spigoli laterali.



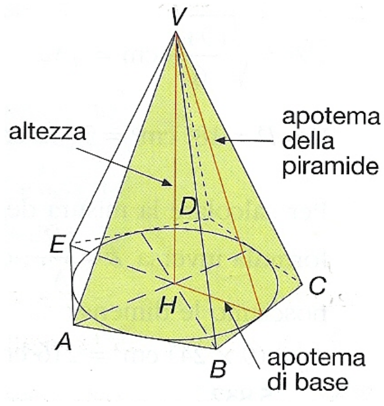
VABCD è una piramide retta a base quadrata. Nel quadrato è possibile inscrivere una circonferenza. Il centro di questa circonferenza è il piede della perpendicolare condotta da V al piano di base.



$V'A'B'C'D'$ è una piramide a base rettangolare. Anche se $V'O$ è perpendicolare al piano di base, **non si tratta di una piramide retta**: nel rettangolo di base non possiamo inscrivere una circonferenza.

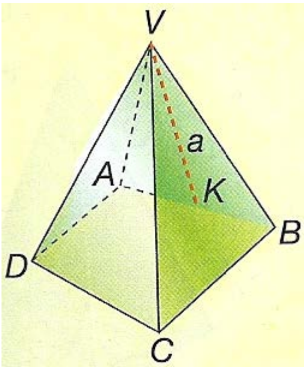
Area laterale e area totale della piramide retta

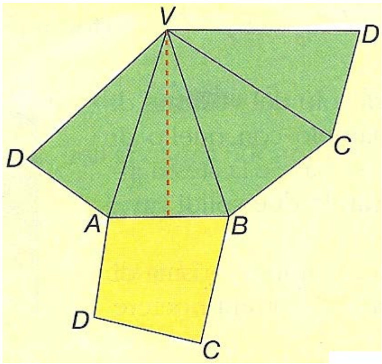
La **piramide** è un poliedro limitato da un poligono qualsiasi, detto **base**, e da tanti triangoli quanti sono i lati della base, aventi tutti un vertice in comune, detto **vertice** della piramide. Una piramide è **retta** se il poligono di base è circoscrittibile ad una circonferenza ed il piede dell'altezza coincide con il centro di questa circonferenza. L'altezza di una qualsiasi faccia laterale è l'**apotema** della piramide.



Una piramide è **regolare** se è **retta** ed il **poligono di base è un poligono regolare**.

Per calcolare la **misura della superficie laterale** consideriamo una piramide retta ed il suo sviluppo.





$$A_\ell = \frac{2p \cdot a}{2} = p \cdot a \qquad 2p = \frac{2 \cdot A_\ell}{a}$$

$$a = \frac{A_\ell}{p}$$

L'**area della superficie laterale** di una **piramide retta** si calcola moltiplicando il perimetro di base per la misura dell'apotema della piramide e dividendo tale prodotto per 2.

Se la **piramide non è retta**, l'area della superficie laterale si calcola sommando le aree delle singole facce. L'area della superficie totale di una qualsiasi piramide si ottiene sommando all'area della superficie laterale quella della sua base.

$$A_t = A_\ell + A_b \qquad A_\ell = A_t - A_b \qquad A_b = S_t - S_l$$

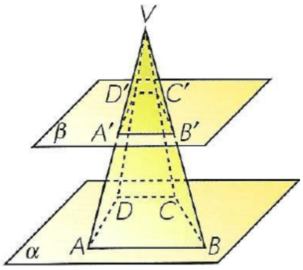
Volume della piramide

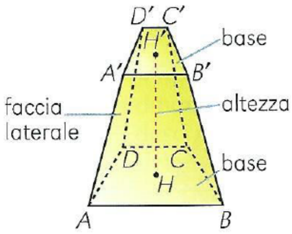
Il **volume** di **una piramide** si ottiene moltiplicando l'area della base per la misura dell'altezza e dividendo tale prodotto per 3.

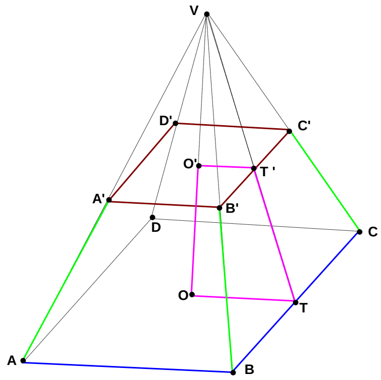
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \qquad A_b = \frac{3 \cdot V}{h} \qquad h = \frac{3 \cdot V}{A_b}$$

Tronco di piramide: area e volume

Dicesi tronco di piramide la parte di piramide compresa tra la sua base ed una sezione parallela alla base.

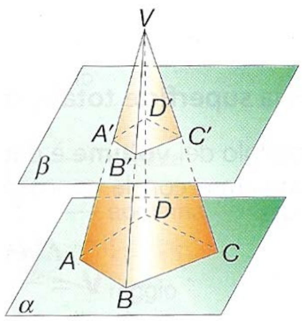


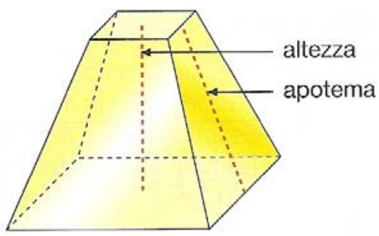




Il tronco di piramide è un poliedro limitato da due poligoni simili che giacciono su piani paralleli e da tanti trapezi quanti sono i lati di ciascun poligono di base.

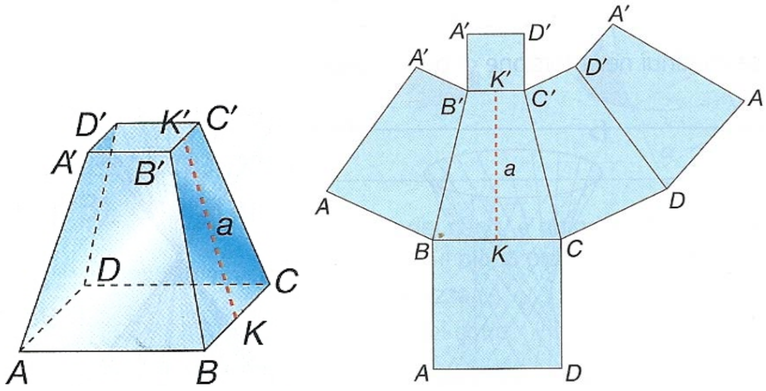
Si dice altezza del tronco di piramide la distanza fra i piani delle due basi. Un tronco di piramide si dice retto se è stato generato da una piramide retta. In questo caso le facce laterali sono trapezi aventi uguale altezza e questa altezza si dice apotema del tronco di piramide.





Un tronco di piramide si dice regolare se è stato generato da una piramide regolare. In questo caso le facce laterali sono trapezi isosceli uguali la cui altezza si dice apotema del tronco di piramide.

Per calcolare l'area della superficie laterale di un cono consideriamo il suo sviluppo sopra un piano.



$$A_{\ell}=\frac{(2p_1+2p_2)\cdot a}{2}=(p_1+p_2)\cdot a \qquad p_1+p_2=\frac{S_{\ell}}{a} \qquad a=\frac{A_{\ell}}{p_1+p_2}$$

L'area della superficie laterale del tronco di piramide retta è uguale al prodotto della semisomma delle misure dei perimetri delle due basi per la misura dell'apotema.

L'area della superficie totale del tronco di piramide si ottiene aggiungendo all'area della superficie laterale l'area delle due basi $A_t=A_{\ell}+A_{b1}+A_{b2}=(p_1+p_2)\cdot a+A_{b1}+A_{b2}$

Per calcolare l'area del volume di un tronco di piramide bisogna applicare la seguente formula:

$$V=\frac{1}{3}h\times\left(A_{b1}+A_{b2}+\sqrt{A_{b1}\times A_{b2}}\right)$$

Il volume di un tronco di piramide è uguale alla terza parte del prodotto della misura della sua altezza per la somma delle aree delle due basi e della radice quadrata del loro prodotto.

h = altezza del tronco di piramide A_{b1} = base maggiore del tronco di piramide

A_{b2} = base minore del tronco di piramide

Poliedri regolari: area e volume

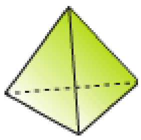
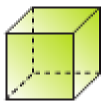
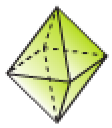
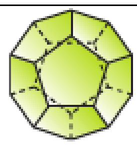
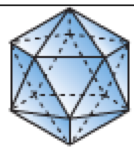
Un **poliedro** si dice **regolare** se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e gli angoli diedri sono congruenti. Esistono soltanto **5** poliedri regolari, detti solidi di Platone: il tetraedro regolare, il cubo o esaedro regolare, l'ottaedro regolare, il dodecaedro regolare, l'icosaedro regolare.

Per calcolare l'area di un poliedro regolare basta applicare la seguente formula:

$\mathbf{A = n \cdot \ell^2 \cdot \varphi}$ con ℓ lato del poliedro regolare, n numero delle facce del poliedro regolare, $\boldsymbol{\varphi}$ la costante caratteristica del poliedro regolare.

Per calcolare il volume di un poliedro regolare basta applicare la seguente formula:

$\mathbf{V = \ell^3 \cdot \sigma}$ con ℓ lato del poliedro regolare, $\boldsymbol{\sigma}$ la costante caratteristica del poliedro regolare.

	Tetraedro regolare	Cubo Esaedro regolare	Ottaedro regolare	Dodecaedro regolare	Icosaedro regolare
					
Facce	4 triangoli equilateri	6 quadrati	8 triangoli equilateri	12 pentagoni regolari	20 triangoli equilateri
Vertici	4	8	6	20	12
Spigoli	6	12	12	30	30
Area	$\mathbf{A = 4\ell^2 \cdot 0{,}433}$	$\mathbf{A = 6\,\ell^2}$	$\mathbf{A = 8\ell^2 \cdot 0{,}433}$	$\mathbf{A = 12\ell^2 \cdot 1{,}72}$	$\mathbf{A = 20\ell^2 \cdot 0{,}433}$
Volume	$\mathbf{V = \ell^3 \cdot 0{,}118}$	$\mathbf{V = \ell^3}$	$\mathbf{V = \ell^3 \cdot 0{,}471}$	$\mathbf{V = \ell^3 \cdot 7{,}663}$	$\mathbf{V = \ell^3 \cdot 2{,}182}$

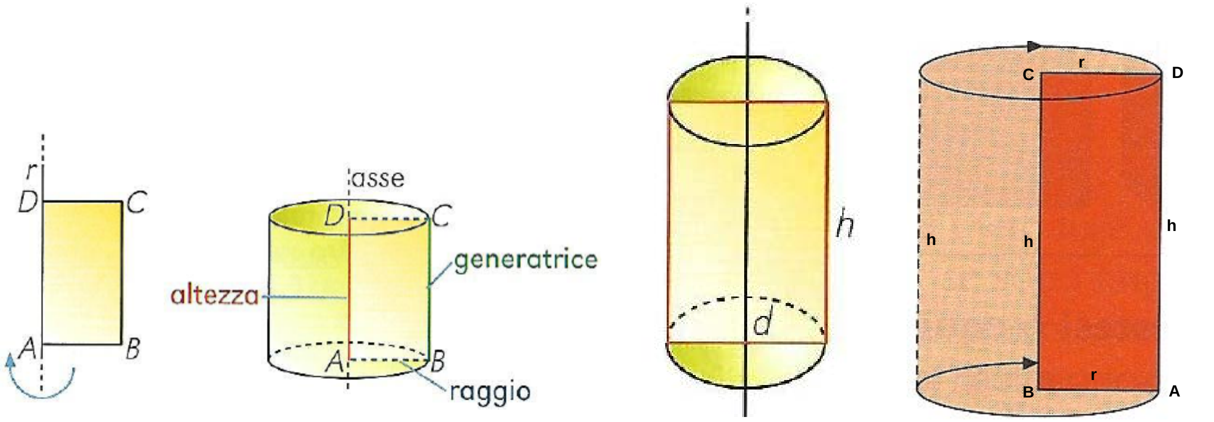
Unità 5

I solidi di rotazione: superficie e volume

Il cilindro

Definizione: Si chiama cilindro circolare retto, o semplicemente cilindro, il solido generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati.

Nella rotazione del rettangolo $ABCD$ attorno al lato BC, questo lato rimane fisso e si chiama asse del cilindro. Un cilindro si dice equilatero se la sua altezza è uguale al diametro della base. $\mathbf{h=2r}$



I due lati opposti AB e CD descrivono due cerchi uguali, situati su piani paralleli, che prendono il nome di basi del cilindro, ed il loro raggio si dice raggio del cilindro. Il lato AD, nella rotazione, descrive una superficie curva, detta superficie cilindrica, che costituisce la superficie laterale del cilindro. I due cerchi congruenti, un o di centro **A** e l'altro di centro **B**, sono le basi del cilindro. L'insieme della superficie laterale e della superficie delle due basi, costituisce la superficie totale del cilindro. La distanza fra i piani delle due basi si chiama altezza del cilindro.

Area laterale e area totale del cilindro

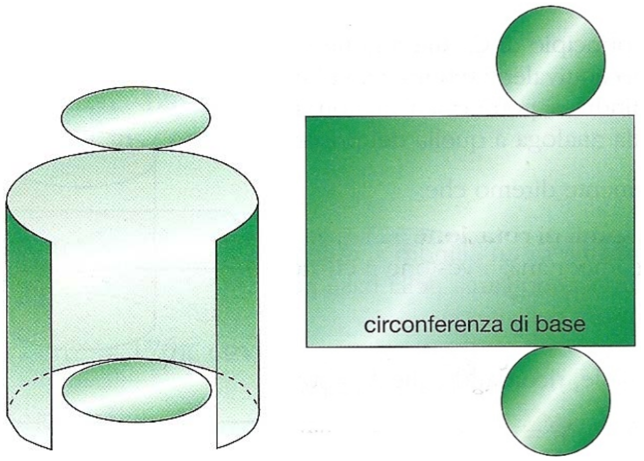
Per calcolare l'area della superficie laterale del cilindro consideriamo il suo sviluppo come indicato in figura. La superficie laterale del cilindro equivale ad un rettangolo avente per base la circonferenza rettificata del cerchio di base e per altezza l'altezza del cilindro.

Questo ci consente di affermare che l'area della superficie laterale di un cilindro si ottiene moltiplicandola lunghezza della circonferenza di base per la misura dell'altezza.

$$A_\ell = C \cdot h \quad C = \frac{A_\ell}{h} \quad h = \frac{A_\ell}{C} \quad C = 2\pi r$$

$$A_\ell = 2\pi r h \qquad r = \frac{A_\ell}{2\pi h}$$

$$h = \frac{A_\ell}{2\pi r}$$



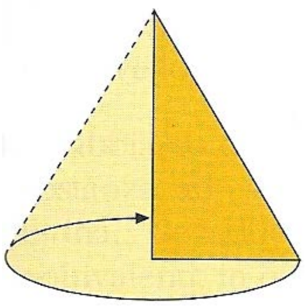
Per calcolare l'area della superficie totale sommeremo all'area della superficie laterale quella delle due basi. $A_t = A_\ell + 2A_b \quad A_\ell = A_t - 2A_b \quad A_b = \frac{A_t - A_\ell}{2}$

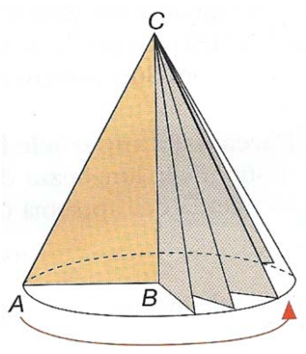
Volume del cilindro

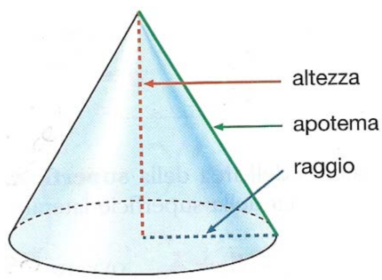
Il volume di un cilindro si ottiene moltiplicando l'area della base per la misura dell'altezza.

$$V = \pi r^2 \cdot h \qquad h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

Il cono







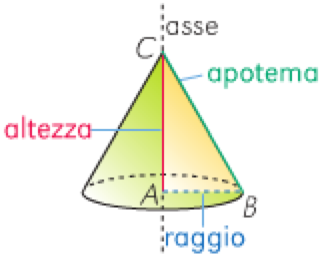
Definizione: Si chiama cono circolare retto, o semplicemente cono, il solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno ad uno dei suoi cateti.

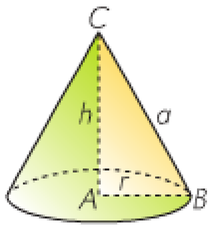
Il cateto attorno al quale ruota è l'asse di rotazione rappresenta l'altezza del cono, l'altro cateto è il raggio del cerchio che forma la base del cono. Una qualsiasi delle posizioni assunte dall'ipotenusa CA nella rotazione si chiama generatrice o apotema o lato del cono. Il punto C si chiama vertice del cono, mentre il cateto CB, che rappresenta la distanza del vertice dal piano della base, prende il nome di altezza del cono.

L'ipotenusa CA, durante la rotazione, genera una superficie curva detta superficie conica che costituisce la superficie laterale del cono. L'insieme della superficie laterale e della superficie di base, costituisce la superficie totale del cono. Un cono si dice equilatero quando la sua apotema è uguale al diametro della base.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC e indicato con **a**, **h**, **r** rispettivamente le misure dell'apotema, dell'altezza e del raggio otteniamo:

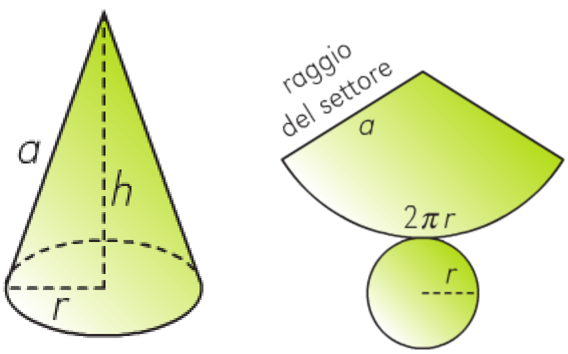
$$\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{h}^2 + \mathbf{r}^2} \qquad \mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{a}^2 - \mathbf{r}^2} \qquad \mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{a}^2 - \mathbf{h}^2}$$

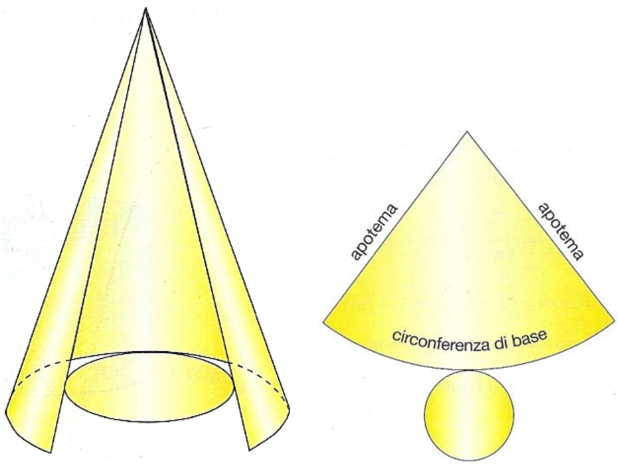




Area laterale e area totale del cono

Per calcolare l'area della superficie laterale di un cono consideriamo il suo sviluppo sopra un piano. La superficie laterale è equivalente alla superficie di un settore circolare il cui arco è uguale alla circonferenza di base del cono ed il cui raggio è uguale all'apotema.





Poiché l'area di un settore circolare si ottiene moltiplicando la lunghezza dell'arco per la misura del raggio e dividendo tale prodotto per due, possiamo affermare che: l'area della superficie laterale di un cono si ottiene moltiplicando la misura della lunghezza della circonferenza di base per la misura della lunghezza dell'apotema e dividendo tale prodotto per 2.

$$S_\ell = \frac{C \cdot a}{2} = \frac{\cancel{2}\pi r \cdot a}{\cancel{2}} = \pi r \cdot a \qquad r = \frac{S_\ell}{\pi a} \qquad a = \frac{S_\ell}{\pi r}$$

Per ottenere l'area della superficie totale di un cono basta sommare l'area della superficie laterale e l'area della base del cono.

$$S_t = S_\ell + A_b = \pi r a + \pi r^2 = \pi r(a + r) \qquad S_\ell = S_t - A_b \qquad A_b = S_t - S_\ell$$

- La sezione che si ottiene intersecando un cono con un piano passante per il suo asse di rotazione è un triangolo isoscele che ha per base il diametro della base del cono e per altezza la sua altezza. Se tale sezione è un triangolo equilatero, il cono è chiamato cono equilatero. In tal caso, l'apotema è congruente al diametro di base: $a = 2r$.

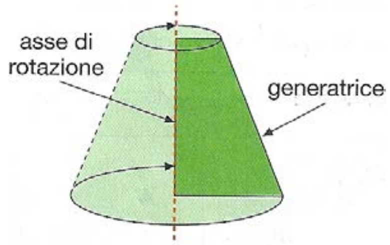
Volume del cono

Il volume di un cono si ottiene moltiplicando l'area della base per la misura dell'altezza e dividendo tale prodotto per 3. $V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$ $\quad r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$ $\quad h = \frac{3V}{\pi r^2}$

Se l'apotema del cono è uguale al diametro della base il cono è equilatero. Valgono le seguenti formule: $a = 2r$ $\quad h = r\sqrt{3}$ $\quad S_l = \pi r a = 2\pi r^2$ $\quad S_t = \pi r a + \pi r^2 = 3\pi r^2$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \pi r^3$$

Il tronco di cono

Il tronco di cono è il solido generato dalla rotazione completa di un trapezio rettangolo attorno allato perpendicolare alle basi.	 

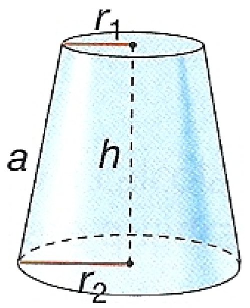
Il tronco di cono è la parte di cono compresa fra il piano contenente la base ed un piano, ad esso parallelo, secante il cono (e non passante per il vertice). Il cerchio di base e quello della sezione si dicono basi del tronco di cono, la distanza dei loro piani altezza del tronco di cono.

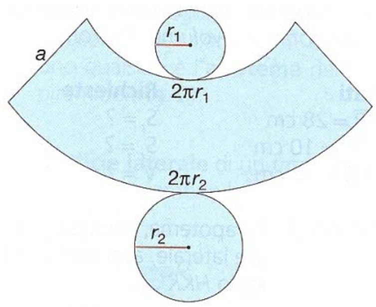
Il segmento AB che genera la superficie laterale del tronco di cono è una sua generatrice e rappresenta l'apotema del tronco.

La parte della superficie conica compresa tra le basi, si dice superficie laterale del tronco di cono. Questa, insieme alle due basi, ne costituisce il contorno o la superficie totale. L'asse del cono contenente il tronco, dicesi asse del tronco di cono.

Area laterale del tronco di cono

Per calcolare l'area della superficie laterale di un **tronco di cono** consideriamo il suo sviluppo sopra un piano.





$$S_\ell=\pi\left(r_1+r_2\right)\cdot a \qquad r_1+r_2=\frac{S_l}{\pi\cdot a} \qquad a=\frac{S_l}{\pi\cdot\left(r_1+r_2\right)}$$

Area totale del tronco di cono

$$S_t=S_l+A_{b1}+A_{b2}=\pi\left(r_1+r_2\right)\cdot a+\pi r_1^2+\pi r_2^2$$

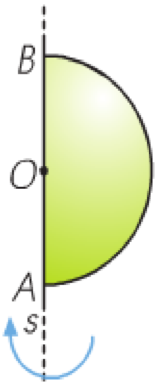
Volume del tronco di cono

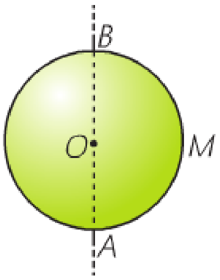
$$V=\frac{\left(\pi r_1^2+\pi r_2^2+\sqrt{\pi r_1^2\cdot\pi r_2^2}\right)\cdot h}{3}=\frac{1}{3}\pi h\cdot\left(r_1^2+r_2^2+r_1\cdot r_2\right)$$

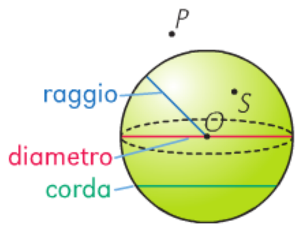
Il volume del tronco di cono si ottiene moltiplicando la somma del prodotto delle misure dei due raggi e dei loro quadrati per la misura dell'altezza e dividendo il risultato ottenuto per 3.

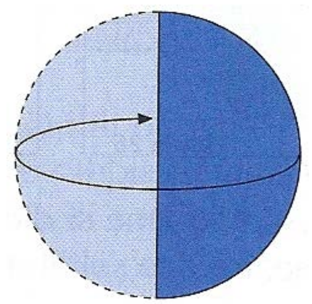
La sfera

Definizione: Si chiama superficie sferica la superficie generata dalla rotazione completa di una **semicirconferenza** attorno al suo diametro. Si chiama sfera il solido generato da una rotazione completa di un **semicerchio** attorno al suo diametro.









Il centro **O** del semicerchio si chiama centro della sfera e della superficie sferica; il diametro del semicerchio generatore è il diametro della sfera e della superficie sferica.

Un piano passante per il centro della sfera si dice piano diametrale: esso taglia la sfera (la sua superficie sferica) secondo un **cerchio massimo** (una **circonferenza massima**). Una retta passante per il centro della sfera è una retta diametrale.

I punti dello spazio possono avere distanza dal centro della sfera minore o maggiore del raggio; nel primo caso si dicono interni alla superficie sferica, nel secondo caso si dicono esterni alla superficie sferica. Nella figura, il punto **S** è interno, il punto **P** esterno.

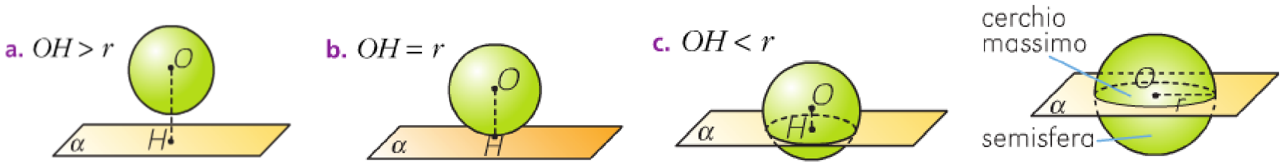
Tutti i punti della superficie sferica hanno distanza dal suo centro uguale al suo raggio. Questo ci consente di definire la superficie sferica come luogo geometrico.

Definizione: La **superficie sferica** è il luogo geometrico dei punti dello spazio che hanno distanza dal centro uguale al suo raggio.

Il segmento che ha per estremi due punti della superficie sferica si dice **corda della sfera** e quella che passa per il suo centro si dice **diametro della sfera**.

Posizioni reciproche di un piano e di una sfera

Sia **OH** la distanza del centro **O** della sfera dal piano a. Se risulta $\mathbf{OH > r}$ il piano a è esterno alla sfera, se risulta $\mathbf{OH = r}$ il piano a è tangente alla sfera, se risulta $\mathbf{OH < r}$ il piano a è secante la sfera.



Misura della superficie sferica

Teorema: L'area della superficie di una sfera è uguale a quattro volte l'area di un suo cerchio massimo. $\mathbf{S = 4\pi r^2}$ $\quad \mathbf{r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}}$

Volume della sfera

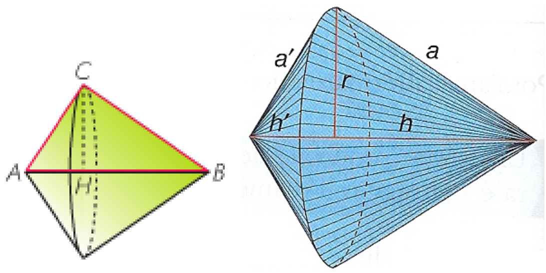
Il volume della sfera si ottiene moltiplicando il cubo della misura del suo raggio per $\frac{4}{3}\pi$.

$$\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3} \qquad \mathbf{r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}}$$

Altri solidi di rotazione

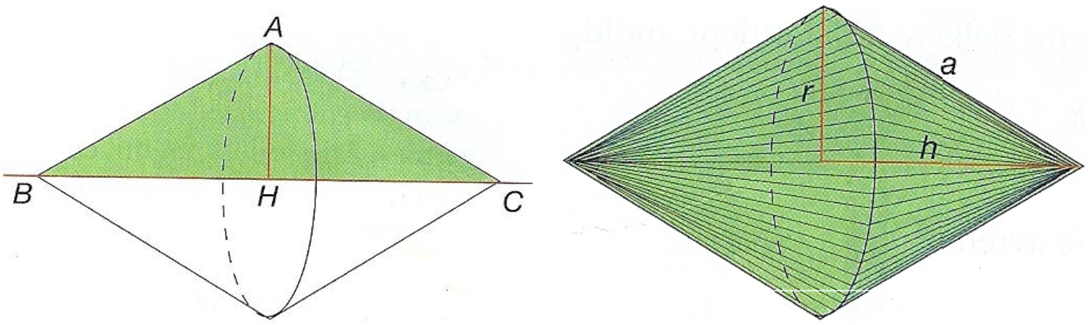
Solido ottenuto dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno all'ipotenusa.

Si ottiene un solido formato da due coni con la base in comune.



$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{\mathbf{cono1}}+\mathbf{A}_{\mathbf{cono2}} \qquad \mathbf{V}=\mathbf{V}_{\mathbf{cono1}}+\mathbf{V}_{\mathbf{cono2}}$$

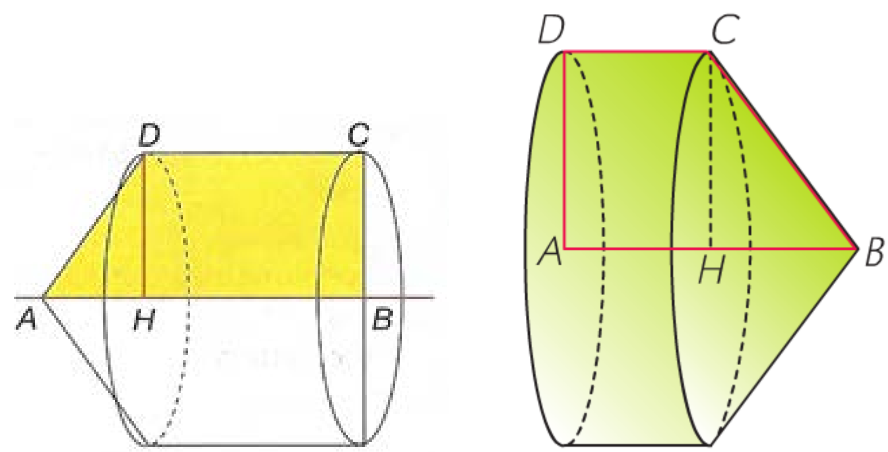
Solido ottenuto dalla rotazione completa di un triangolo isoscele attorno alla base



Si ottiene un solido formato da due coni uguali con la base in comune

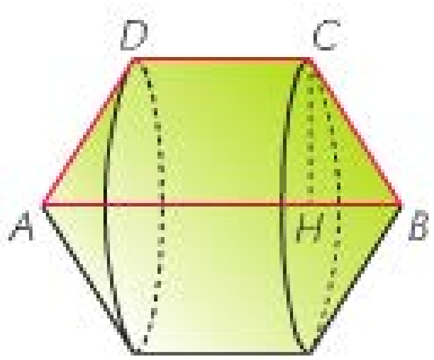
$$\mathbf{A}=2\cdot\mathbf{A}_{\text{laterale cono}} \qquad \mathbf{V}=2\cdot\mathbf{V}_{\mathbf{cono}}$$

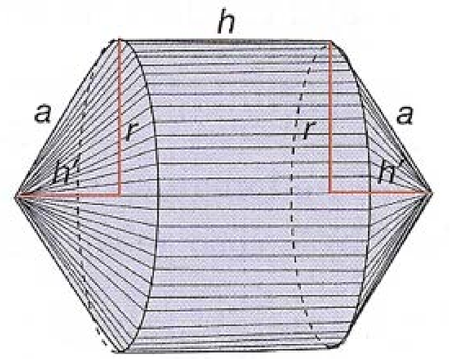
Solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio rettangolo ABCD attorno alla base maggiore AB



Si ottiene un cilindro sormontato da un cono. $\mathbf{A}_t=\mathbf{A}_{b\ cilindro}+\mathbf{A}_{\ell\ cilindro}+\mathbf{A}_{\ell\ cono}$ $\quad \mathbf{V}=\mathbf{V}_{cilindro}+\mathbf{V}_{cono}$

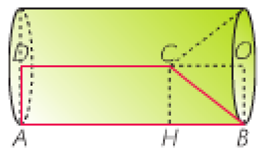
Solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio isoscele ABCD attorno alla base maggiore AB





Si ottiene un solido formato da un cilindro e due coni congruenti aventi le basi coincidenti con quelle del cilindro. Valgono le seguenti formule: $A = A_{\ell\ cilindro} + 2A_{\ell\ cono}$ $V = V_{cilindro} + 2V_{cono}$

Solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio rettangolo ABCD attorno alla base minore CD

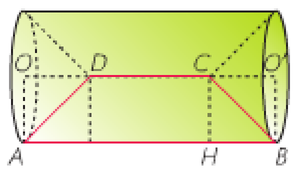


Si ottiene un cilindro con un cono cavo.

Area totale del solido ottenuto = area di base del cilindro area laterale del cilindro + area laterale del cono $A_t = A_{b\ cilindro} + A_{\ell\ cilindro} + A_{\ell\ cono}$

volume del solido ottenuto = volume del cilindro diminuito del volume del cono $V = V_{cilindro} - V_{cono}$

Solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio isoscele ABCD attorno alla base minore CD



Si ottiene un cilindro con due coni cavi congruenti. La base maggiore AB è l'altezza del cilindro, l'altezza CH del trapezio coincide con l'altezza del cilindro, l'altezza CH del trapezio è il raggio del cilindro e delle basi dei due coni, il lato obliquo BC è l'apotema di ciascun cono.

Superficie laterale del solido di rotazione = superficie laterale del cilindro + due volte la superficie laterale di un cono. $A_t = A_{b\ cilindro} + 2A_{\ell\ cono}$

Volume del solido di rotazione = volume del cilindro diminuito di due volte il volume di un cono

$$V = V_{cilindro} - 2V_{cono}$$

Nessun altro studio richiede meditazione più pacata;

nessun altro meglio induce ad essere cauti nell'affermare,

semplici ed ordinati nell'argomentare,

precisi e chiari nel dire;

e queste semplicissime qualità sono sì rare che possono bastare da sole ad elevare chi ne è dotato molto al di sopra della maggioranza degli uomini.

Perciò io esorto a studiare matematica

pur chi si accinga a divenire avvocato o economista, filosofo o letterato; perché io credo e spero che non gli sarà inutile sapere bene ragionare e chiaramente esporre.

Alessandro Padoa