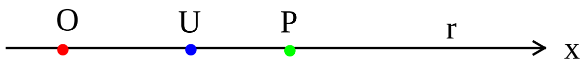
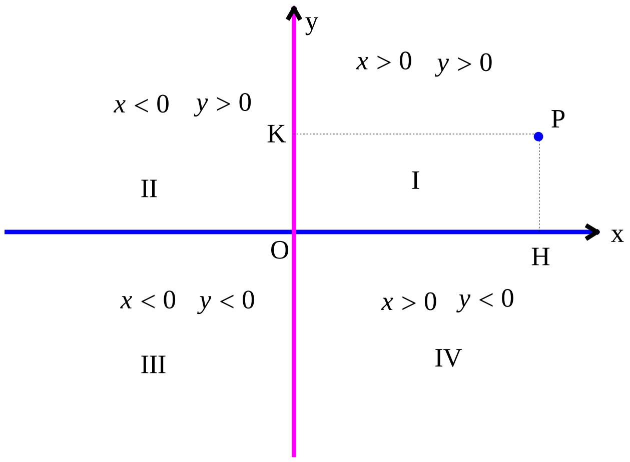
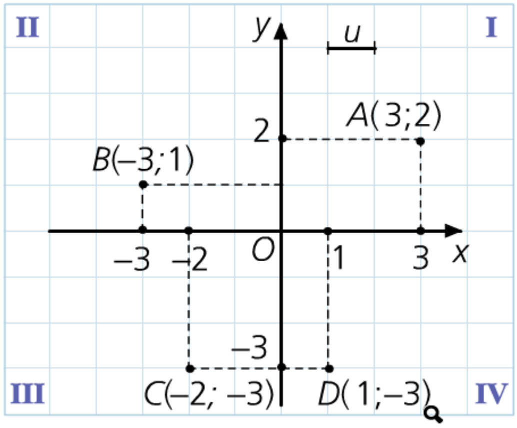
Coordinate Cartesiane

Su di una retta $\mathbf{r}$ consideriamo un punto $\mathbf{O}$, detto origine, un verso positivo indicato con una freccia ed un segmento unitario OU. In questo caso la retta $\mathbf{r}$ dicesi asse delle ascisse e viene indicata col simbolo $\mathbf{x}$ e di solito è disegnata in posizione orizzontale.



Ogni punto $P \in r$ individua il segmento OP. Noi sappiamo che $\dfrac{OP}{OU}$ è un numero reale che esprime la misura del segmento OP rispetto ad OU. Adesso poniamo: $\dfrac{\mathbf{OP}}{\mathbf{OU}} = \mathbf{x}$ e conveniamo di considerare $\mathbf{x}$ **positivo** (**negativo**) se P si trova alla destra (**sinistra**) di $\mathbf{O}$. Il numero reale relativo $\mathbf{x}$ dicesi ascissa del punto P. Da quanto abbiamo detto è evidente che esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali relativi **R** ed i punti **P** di una retta $\mathbf{r}$ sulla quale abbiamo fissato un punto origine $\mathbf{O}$, un verso positivo ed una unità di misura per i segmenti. Adesso consideriamo due rette orientate $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ fra loro perpendicolari, La retta $\mathbf{x}$ è orientata da sinistra verso destra, la retta $\mathbf{y}$ dal basso verso l'alto. Sia O il punto comune alle rette $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$. Sia **P** un punto qualsiasi del piano. Sia **H** la proiezione ortogonale di P sulla retta $\mathbf{x}$, **K** la proiezione ortogonale di P sulla retta $\mathbf{y}$. Sia $\dfrac{OH}{OU} = x$ l'ascissa del punto H rispetto alla retta orientata $\mathbf{x}$, sia $\dfrac{OK}{OU} = y$ l'ascissa del punto K rispetto alla retta orientata $\mathbf{y}$, I numeri reali relativi $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ si dicono le **coordinate cartesiane** del punto P. Si scrive $P(x,y)$ e si legge <<**P di coordinate** $\mathbf{x}$ **ed** $\mathbf{y}$>>. $\mathbf{x}$ è detta **ascissa** del punto P, $\mathbf{y}$ è detta **ordinata** del punto P. La retta orientata **x** è detta **asse delle ascisse** o **asse delle** $\mathbf{x}$, la retta orientata $\mathbf{y}$ è detta **asse delle ordinate** o **asse delle** $\mathbf{y}$. Le due rette $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ costituiscono un **sistema di assi cartesiani ortogonali**. Il punto $\mathbf{O}$ è detto **origine degli assi cartesiani**. Da quanto detto si deduce che esiste una **corrispondenza biunivoca** fra le coppie ordinate di numeri reali relativi ed i punti P di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani. Le rette $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ dividono il piano in 4 parti ciascuna delle quali prende il nome di **quadrante**. Le rette $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ e le loro due bisettrici dividono il piano in **8** parti, ciascuna delle quali prende il nome di **ottante.**





La distanza tra due punti

La distanza tra i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ si calcola applicando la seguente formula:

$$\mathbf{d(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$

Calcolare la distanza tra i punti $A(5;-6)$ e $B(1;-3)$

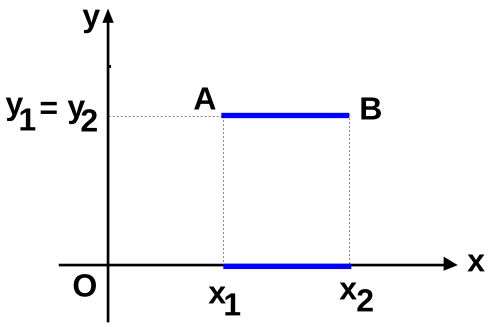
$$\overline{AB}=\sqrt{(1-5)^2+[-3-(-6)]^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3+6)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=\mathbf{5}$$

Osservazione: A e B hanno la stessa ordinata ($y_1 = y_2$) allora il segmento AB è parallelo all'asse delle ascisse.

In questo caso abbiamo: $\mathbf{d(AB)=|x_2-x_1|}$

Possiamo anche dire che:

d(A,B) = **ascissa maggiore** - **ascissa minore**

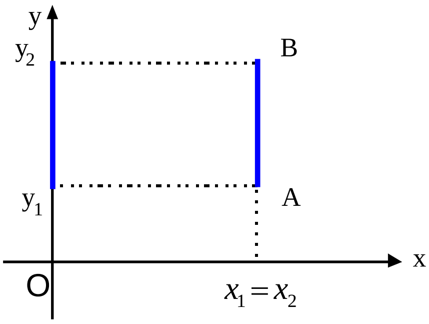


Se i punti **A** e **B** hanno la stessa ascissa ($x_1 = x_2$) allora il segmento AB è parallelo all'asse delle ordinate.

In questo caso abbiamo: $\mathbf{d(A,B)=|y_2 - y_1|}$

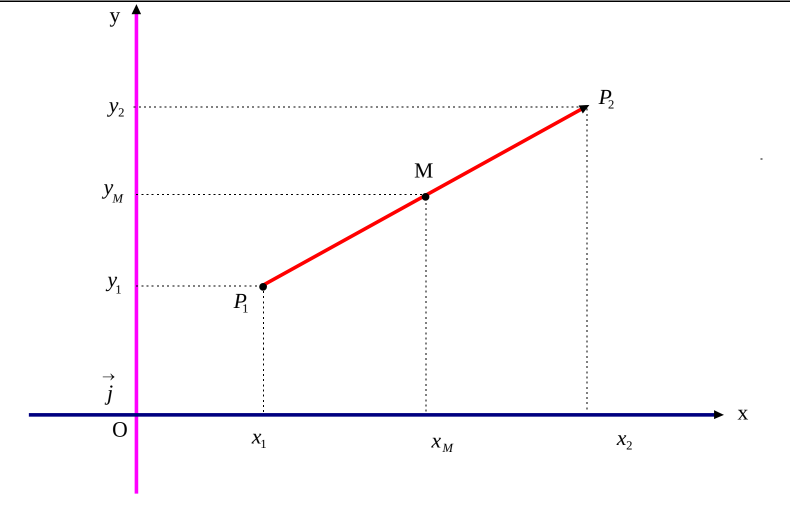
Possiamo anche dire che:

d(A,B) = **ordinata maggiore** - **ordinata minore**



Le coordinate del punto medio di un segmento

Per calcolare le coordinate del punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento di estremi $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ basta applicare la seguente formula:



$$\mathbf{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}}, \quad \mathbf{y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

$$P_1(3;-4) \quad P_2(-5;10)$$

$$x_M = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

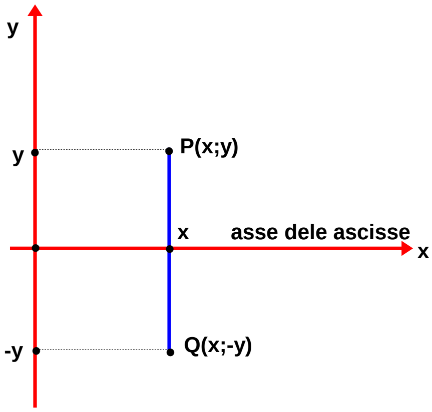
$$y_M = \frac{-4+10}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\mathbf{M(-1;3)}$$

Punti simmetrici rispetto agli assi cartesiani e rispetto all'origine

Il punto $Q(x_Q; y_Q)$ è simmetrico del punto $P(x_P, y_P)$ rispetto all'asse delle ascisse se ha la stessa ascissa di P ma ordinata opposta, cioè se:

$$\begin{cases} x_Q = x_P \\ y_Q = -y_P \end{cases}.$$

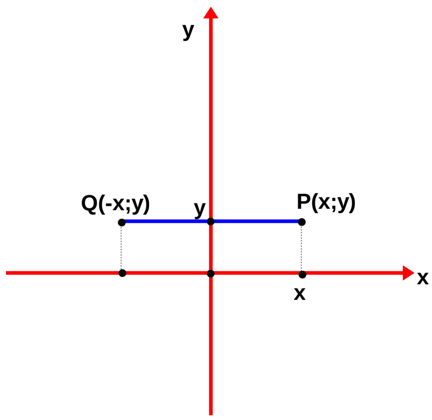


Il punto $Q(x;-y)$ è simmetrico del punto $P(x;y)$ rispetto all'asse delle ascisse.

Il punto $Q(5;-7)$ è simmetrico del punto $P(5;7)$ rispetto all'asse delle ascisse.

Il punto $Q(x_Q; y_Q)$ è simmetrico del punto $P(x_P, y_P)$ rispetto all'asse delle ordinate se ha la stessa ordinata di P ma ascissa opposta, cioè se:

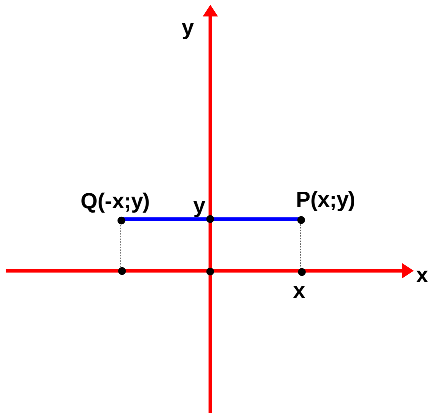
$$\begin{cases} x_Q = -x_P \\ y_Q = y_P \end{cases}.$$



Il punto $Q(-x;y)$ è simmetrico del punto $P(x;y)$ rispetto all'asse delle ordinate.

Il punto $Q(-5;-3)$ è simmetrico del punto $P(5;-3)$ rispetto all'asse delle ordinate.

Il punto $Q(x_Q;y_Q)$ è simmetrico del punto $P(x_P,y_P)$ rispetto all'origine degli assi cartesiani se hanno opposte sia l'ascissa che l'ordinata, cioè se: $\begin{cases} x_Q = -x_P \\ y_Q = -y_P \end{cases}$.



Il punto $Q(-x;-y)$ è simmetrico del punto $P(x;y)$ rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Il punto $Q(-5;+4)$ è simmetrico del punto $P(5;-4)$ rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Equazione cartesiana di una retta

Definizione: Dicesi retta il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate $(x;y)$ verificano una equazione di primo grado a due incognite: $\mathbf{ax+by+c=0}$ **[B]**

è l'equazione generale della retta o equazione della retta sotto forma implicita.

$by = -ax - c$ $\quad y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ Ponendo $\mathbf{k=-\dfrac{a}{b}}$, $\mathbf{q=-\dfrac{c}{b}}$ l'equazione **[B]** diventa:

$$\mathbf{y=kx+q} \qquad \textbf{[C]}$$

che rappresenta l'equazione canonica della retta o equazione della retta sotto forma esplicita. Il numero reale relativo **q** dicesi ordinata all'origine perché rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y, mentre **k** dicesi **coefficiente angolare** della retta.

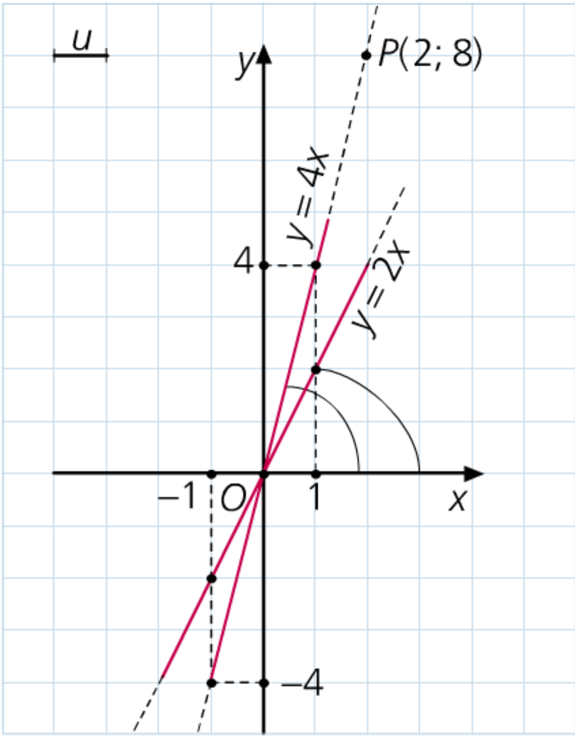
$4x + 3y - 12 = 0$ equazione generale della retta,

$y = -\dfrac{4}{3}x + 4$ equazione canonica **della retta**,

$k=-\dfrac{4}{3}$ = coefficiente angolare della retta, $\quad q=4$ = ordinata all'origine

Una retta passa per l'origine degli assi cartesiani se nella sua equazione canonica manca il termine noto.

Le rette di equazioni **$y=4x$** e **$y=2x$** passano per l'origine degli assi cartesiani.



Equazioni di rette aventi una posizione particolare rispetto agli assi cartesiani

$x = k$ rappresenta l'equazione di una generica retta parallela all'asse delle y. **k** rappresenta l'ascissa di un generico punto della retta.

$y = h$ rappresenta l'equazione di una generica retta parallela all'asse delle x. **h** rappresenta l'ordinata di un generico punto della retta.

$x = 0$ è l'equazione dell'asse delle ordinate

$y = 0$ è l'equazione dell'asse delle ascisse

$y = x$ è l'equazione della bisettrice del I e III quadrante, detta anche bisettrice fondamentale degli assi cartesiani.

$y = -x$ è l'equazione della bisettrice del II e IV quadrante, detta anche bisettrice secondaria degli assi cartesiani.

$ax + by = 0$ oppure **$y = kx$** è l'equazione di una generica retta passante per l'origine degli assi cartesiani.

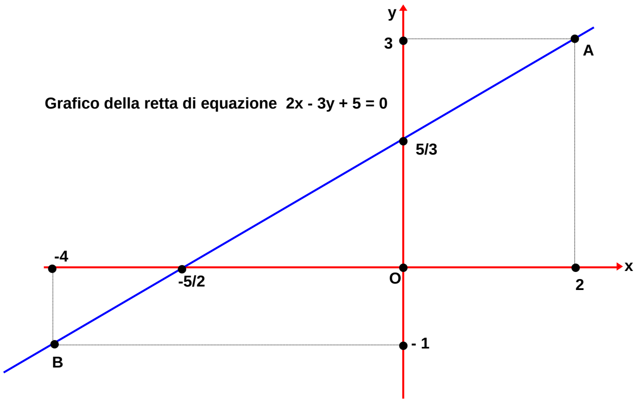
Grafico di una retta

Per disegnare il grafico di una retta basta individuare le coordinate di due suoi opportuni punti. Se possibile, è conveniente utilizzare punti a coordinate intere.

Disegnare il grafico della retta di equazione $\mathbf{2x-3y+5=0}$ che, sotto forma esplicita, assume la forma: $\mathbf{y=\frac{2x+5}{3}}$

x	y	
2	3	$A(2;3)$
-4	-1	$B(-4;-1)$

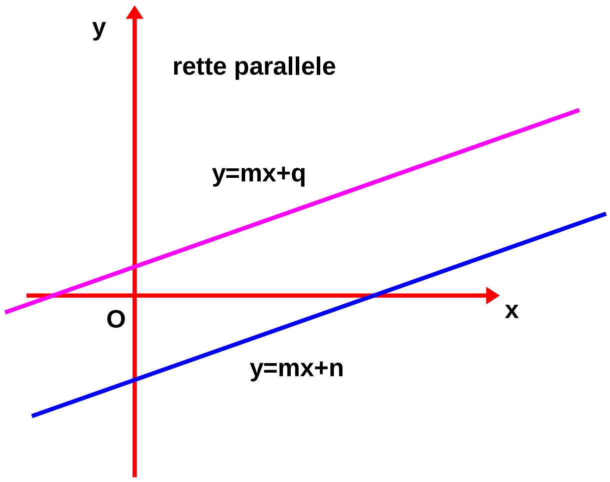
Per disegnare il grafico della retta di equazione $\mathbf{2x-3y+5=0}$ avrei potuto utilizzare le intersezioni con gli assi cartesiani. Tali intersezioni hanno rispettivamente ascissa ed ordinata espresse da numeri frazionari.



Rette parallele

Due rette sono **parallele** se hanno lo stesso coefficiente angolare. Le rette $\mathbf{r: y=12x-45}$ ed $\mathbf{s: y=12x+32}$ sono parallele in quanto hanno lo stesso coefficiente angolare $\mathbf{k=12}$.

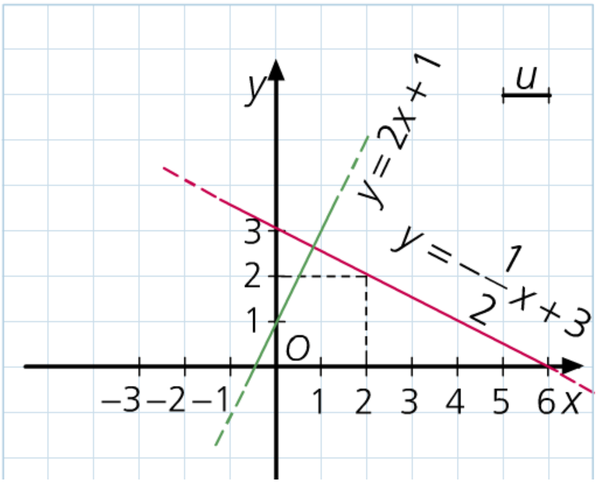
Se due rette hanno lo stesso coefficiente angolare esse sono parallele, viceversa se esse sono parallele allora hanno lo stesso coefficiente angolare.

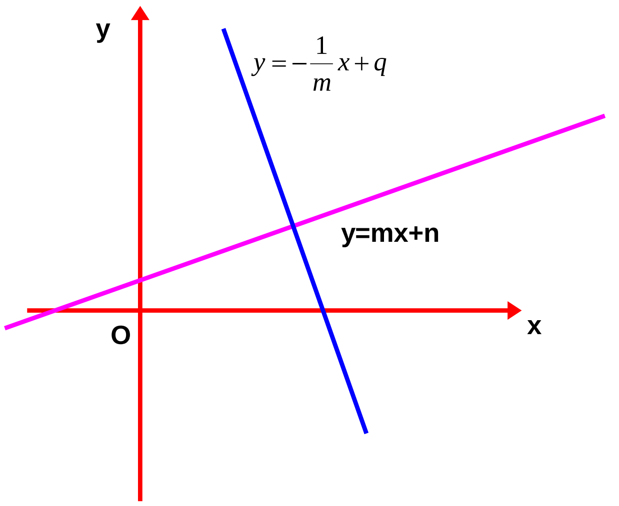


Rette perpendicolari

Due rette sono perpendicolari quando i loro coefficienti angolari sono antireciproci, cioè quando il prodotto dei loro coefficienti angolari è **-1**.

Le rette $y=\mathbf{2}x+1$, $y=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}x+3$ sono perpendicolari in quanto il prodotto dei loro coefficienti angolari vale: $\mathbf{2}\cdot\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)=\mathbf{-1}$





Due rette sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1 ($m\cdot m_1 = -1$), oppure se:

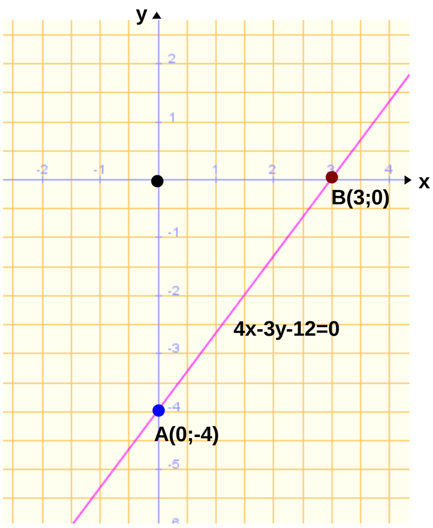
Intersezione di una retta con gli assi cartesiani

Voglio calcolare le coordinate dei di intersezione della retta di equazione $\mathbf{4x-3y-12=0}$. Per trovare le coordinate del punto **A** intersezione della retta con l'asse **y** basta porre nella sua equazione $\mathbf{x=0}$.

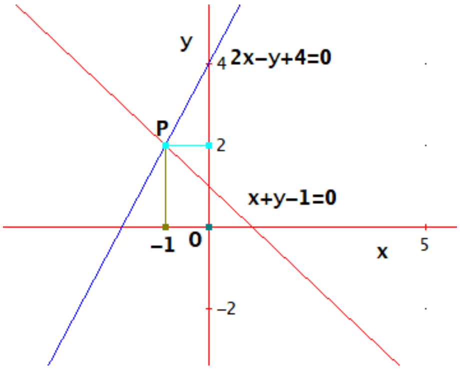
Otteniamo: $-3y-12=0$ $\quad -3y=12$ $\quad y=\frac{12}{-3}=-4$

$\mathbf{A(0;-4)}$

Per trovare le coordinate del punto **B** intersezione della retta con l'asse **x** basta porre nella sua equazione $\mathbf{y=0}$. Otteniamo: $4x-12=0$ $\quad 4x=12$ $\quad x=\frac{12}{4}=3$ $\quad \mathbf{B(3;0)}$



Intersezione di due rette



Calcolare le coordinate del punto **P** intersezione delle rette $\mathbf{x+y-1=0}$ $\mathbf{2x-y+4=0}$. Basta risolvere il sistema formato dalle due equazioni: $\begin{cases} \mathbf{x+y-1=0} \\ \mathbf{2x-y+4=0} \end{cases}$

dalla prima equazione ci ricaviamo la $y=1-x$ che sostituiamo nella seconda equazione.

Otteniamo: $2x-1+x+4=0$ $3x=1-4$ $3x=-3$ $x=1$ $\mathbf{P(-1;2)}$

Equazione della retta passante per due punti

Equazione della retta passante per i punti $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$: $\mathbf{\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}}$

Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $\mathbf{A(1;3)}$ e $\mathbf{B(2;4)}$

$$\frac{y-3}{4-3}=\frac{x-1}{2-1} \quad \frac{y-3}{1}=\frac{x-1}{1} \quad y-3=x-1 \quad y=x+3-1$$

$\mathbf{y=x+2}$ equazione della retta sotto forma esplicita

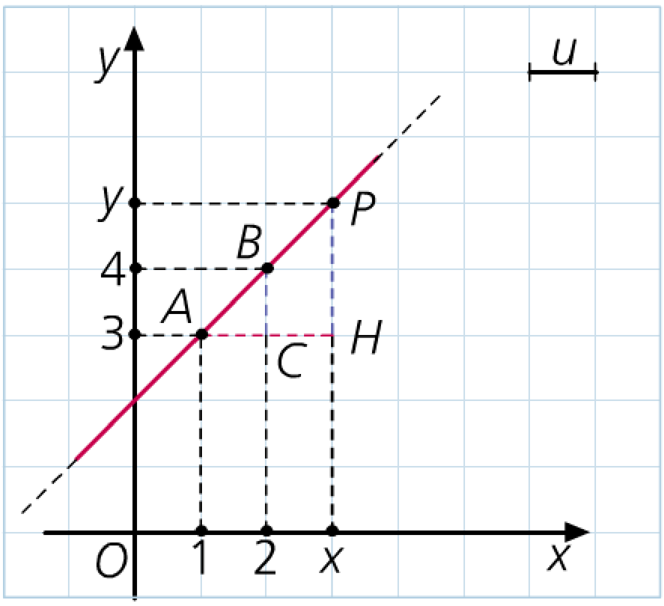
$\mathbf{x-y+2=0}$ equazione della retta sotto forma implicita

Grafico della retta passante per i punti $\mathbf{A(1;3)}$ e $\mathbf{B(2;4)}$.

La sua equazione è:

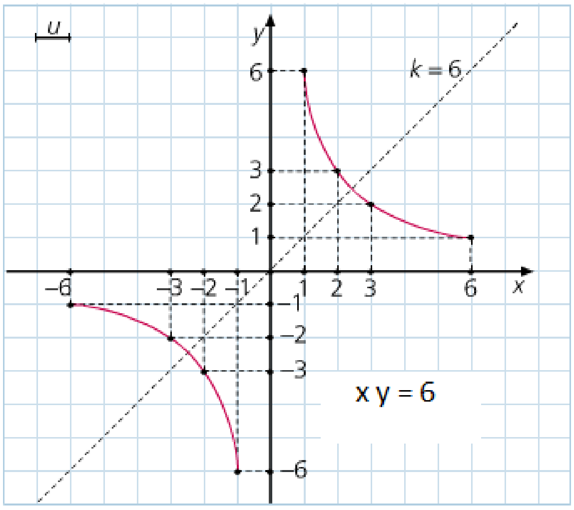
$\mathbf{y=x+2}$ equazione della retta sotto forma esplicita

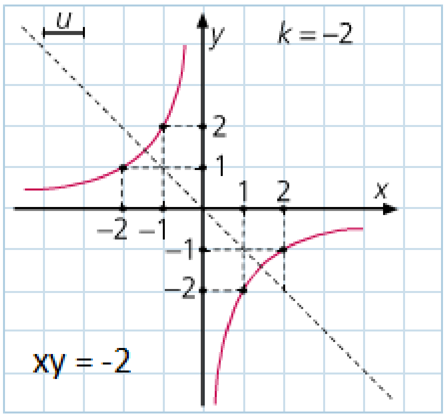
$\mathbf{x-y+2=0}$ equazione della retta sotto forma implicita



L'iperbole equilatera

$xy = k$ o $y = \frac{k}{x}$ è l'equazione di una iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti che sono gli assi cartesiani. Tale curva esprime graficamente la proporzionalità inversa tra grandezze, è costituita da due rami che si sviluppano nel I e III quadrante se risulta $k > 0$, nel II e IV quadrante se risulta $k < 0$, è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani ed ha come assi di simmetria le bisettrici dei quadranti cui appartiene. Asintoto di una curva è una retta tangente alla curva all'infinito in quanto si avvicina sempre più alla curva senza mai toccarla.





La parabola

Ogni relazione del tipo $y = kx^2$ rappresenta l'equazione di una curva chiamata parabola. La parabola volge la concavità verso l'alto, cioè si sviluppa nel I e II quadrante, se risulta $k > 0$, volge la concavità verso il basso, cioè si sviluppa nel III e IV quadrante, se risulta $k < 0$.

In entrambi i casi il vertice della parabola coincide con l'origine degli assi cartesiani.

Per $k = 1$ l'equazione diventa $y = x^2$ ed esprime la dipendenza quadratica tra due grandezze.

Grafico della funzione

$y = x^2$

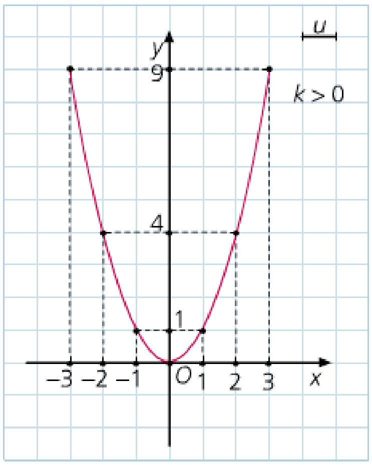
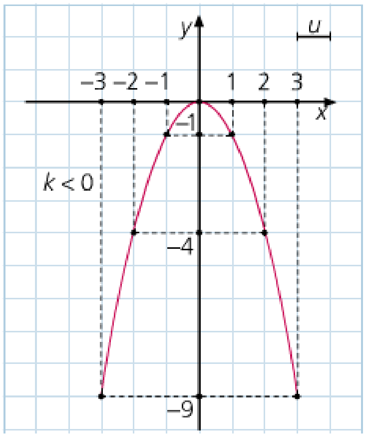


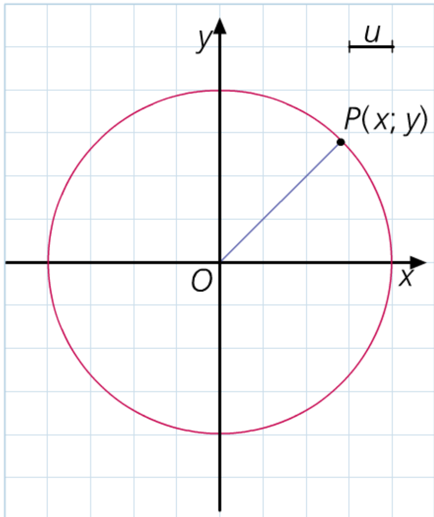
Grafico della funzione

$y = -x^2$



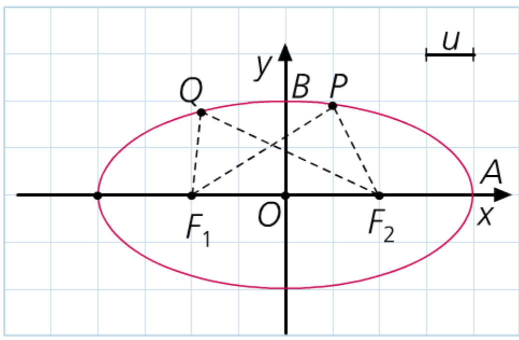
La circonferenza

Un'equazione del tipo $x^2 + y^2 = r^2$ rappresenta una circonferenza di raggio r con il centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani.



L'ellisse

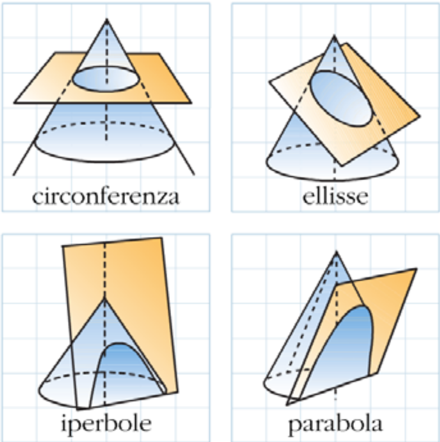
Un'equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rappresenta una ellisse. Il centro dell'ellisse coincide con l'origine degli assi cartesiani. I punti F_1 e F_2 sono i fuochi dell'ellisse. L'ellisse incontra gli assi cartesiani in **4** punti che sono i suoi vertici.



L'ellisse è simmetrica rispetto agli assi cartesiani ed alla sua origine **O** .

OA = a è il semiasse maggiore **OB = b** è il semiasse minore.

Le coniche come intersezioni di un cono con un piano



Le coniche

La circonferenza, l'ellisse, l'iperbole e la parabola appartengono a un insieme di curve dette **coniche** perché sono, rispettivamente, la sezione di un cono con:

a. un piano parallelo al piano di base (**circonferenza**);
b. un piano inclinato rispetto all'asse di rotazione, ma non parallelo a una generatrice (**ellisse**);
c. un piano parallelo all'asse di rotazione (**iperbole**);
d. un piano parallelo a una sua generatrice (**parabola**).

Tutte le coniche possono essere rappresentate da equazioni di 2° grado.

Elogio della matematica

Nessun altro studio richiede meditazione più pacata;

nessun altro meglio induce ad essere cauti nell'affermare,

semplici ed ordinati nell'argomentare,

precisi e chiari nel dire;

e queste semplicissime qualità sono sì rare

che possono bastare da sole ad elevare chi ne è dotato

molto al di sopra della maggioranza degli uomini.

Perciò io esorto a studiare matematica

pur chi si accinga a divenire avvocato o economista,

filosofo o letterato; perché io credo

e spero che non gli sarà inutile sapere bene ragionare

e chiaramente esporre.

Alessandro Padoa