Unità 6

Gli insiemi: richiami

I concetti di insieme e di elemento di un insieme sono concetti primitivi, cioè non definibili mediante altri concetti più semplici. Il termine insieme è sinonimo di collezione, raccolta, aggregato. Di un insieme possiamo dare la seguente descrizione: un insieme è una collezione di elementi distinti l'uno dall'altro tali da potere dire se un certo elemento, comunque scelto, appartiene o non appartiene al raggruppamento considerato. Un insieme è individuato quando è assegnata una legge o una proprietà caratteristica in base alla quale è possibile stabilire in maniera univoca se un elemento appartiene o non appartiene all'insieme. Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino: $\mathbf{A,B,C,D,E,F,G}\cdots$. Gli elementi di un insieme si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto latino: $\mathbf{x,y,a,b,c,}\cdots$.

La scrittura $\mathbf{a}\in\mathbf{A}$ indica che l'elemento $\mathbf{a}$ appartiene all'insieme $\mathbf{A}$. La scrittura $\mathbf{b}\notin\mathbf{A}$ significa che l'elemento $\mathbf{b}$ non appartiene all'insieme $\mathbf{A}$.

Diremo che un insieme $\mathbf{A}$ è finito se esiste un numero naturale $\mathbf{n}$ tale che ad $\mathbf{A}$ appartengono $\mathbf{n}$ elementi, cioè quando non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme. Quindi, si chiamano finiti gli insiemi composti da un numero di elementi che è possibile contare fino all'esaurimento. L'insieme privo di elementi si dice insieme vuoto e si indica con $\varnothing = \{\ \}$. Diremo invece che $\mathbf{A}$ è infinito se, qualunque sia il numero naturale $\mathbf{n}$, all'insieme appartengono più di $\mathbf{n}$ elementi, cioè un insieme è infinito se può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Due insiemi si dicono equipotenti se hanno lo stesso numero di elementi cioè se tra i due insiemi esiste una corrispondenza biunivoca.

Un insieme può essere rappresentato in diverse maniere:

1) Rappresentazione tabulare o per elencazione

Questa rappresentazione consiste nell'elencare tutti gli elementi che appartengono all'insieme racchiudendoli tra parentesi graffe e separandoli con una virgola.

Esempi:

$A = \{a, e, i, o, u\}$ = rappresentazione tabulare dell'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano

$B = \{1,3,8,17,25\}$

Quando dobbiamo rappresentare per elencazione un insieme infinito, elenchiamo solo alcuni elementi e si mettono dei puntini per indicare gli altri infiniti elementi mancanti.

$A=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18\cdots\}$ rappresenta l'insieme dei numeri pari

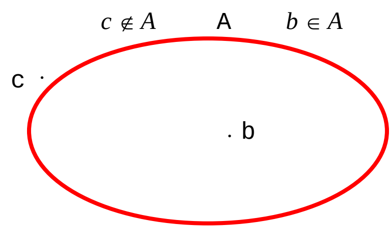
2) Rappresentazione caratteristica

Questa rappresentazione consiste nell'esprimere in modo esplicito una **proprietà caratteristica** che permetta di stabilire senza ambiguità se un elemento appartiene o non appartiene all'insieme considerato. Si scrive, tra parentesi graffe, un generico elemento **x** dell'insieme e poi si esplicita la proprietà caratteristica di **x**, separando la lettera **x** da questa proprietà con la sbarra | e mediante i due punti: che, simbolicamente rappresentano la frase <<tale che>>.

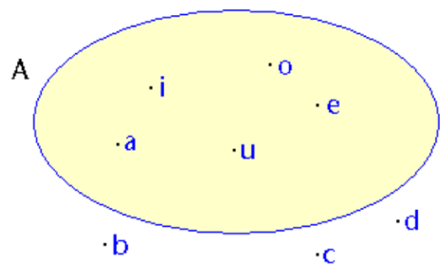
$A = \{ x : x < 8 \wedge x \in N\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ Si legge: A è l'insieme i cui elementi sono numeri naturali minori di 8, oppure: A è l'insieme degli elementi **x** appartenenti all'insieme dei numeri naturali tali che siano minore del numero 8.

Rappresentazione grafica mediante i diagrammi di **Eulero - Venn**

Si disegna una linea chiusa priva di nodi nella cui regione interna si immagina siano racchiusi gli elementi dell'insieme. Il contorno non può contenere alcun elemento dell'insieme. Ogni punto disegnato all'interno della curva chiusa priva di nodi rappresenta un elemento dell'insieme; ogni punto disegnato esternamente rappresenta un elemento non appartenente all'insieme.



Rappresentazione mediante i diagrammi di **Eulero - Venn** dell'insieme A delle vocali dell'alfabeto italiano. Gli elementi inseriti all'interno della linea chiusa appartengono all'insieme considerato, gli elementi lasciati fuori non appartengono all'insieme A.



Si dice che un insieme A è un sottoinsieme proprio dell'insieme B se ogni elemento di A è anche elemento di B, ma esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A. Questa relazione fra insiemi si scrive: $A \subset B$ e si legge : << A è sottoinsieme di B, oppure A è incluso in B. Il simbolo $\subset$ è detto simbolo di inclusione.

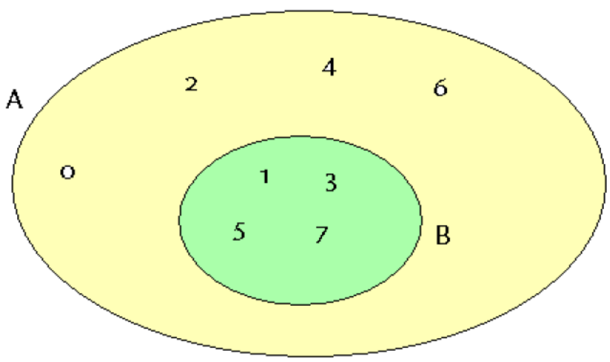
Dalla definizione di sottoinsieme si deduce che fra i sottoinsiemi di un certo insieme B c'è l'insieme vuoto $\varnothing$ e c'è l'insieme B. Si abbia l'insieme $B = \{a, b, c\}$ I sottoinsiemi di B sono:

$$\varnothing \ , \ \{a\} \ , \ \{b\} \ , \ \{c\} \ , \ \{a,b\} \ , \ \{a,c\} \ , \ \{b,c\} \ , \ \{a,b,c\}$$

Quando A è un sottoinsieme non vuoto di B e che non coincide con B, si dice che A è un sottoinsieme proprio di B, mentre l'insieme vuoto e l'insieme B si chiamano sottoinsiemi impropri di B.

Un esempio di sottoinsieme

Consideriamo i due seguenti insiemi: $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ e $B=\{1,3,5,7\}$. Notiamo che ogni elemento di B è anche un elemento di A. Questo ci consente di affermare che B è un sottoinsieme di A.



In simboli scriviamo: $B \subset A$ e leggiamo "l'insieme B è un sottoinsieme di A"

Intersezione di due o più insiemi

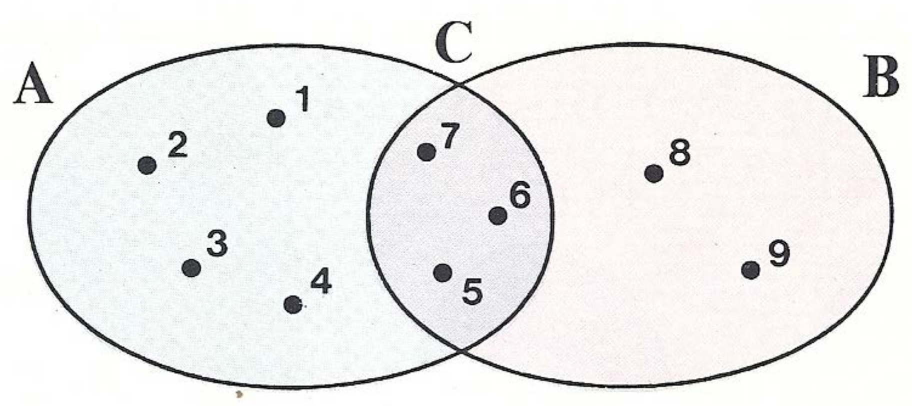
- Dati due insiemi A e B, l'insieme C formato dagli elementi comuni ad A e B si chiama insieme intersezione o **intersezione** di A e B. Scriviamo $C = A \cap B$ e leggiamo : << *C è uguale ad A intersecato B*>>. In simboli abbiamo: $C = A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

$\cap$ è il simbolo di intersezione

<< **Dire che x appartiene all'intersezione di A con B equivale a dire che x appartiene contemporaneamente ad A e B** >>.

Consideriamo ancora i seguenti insiemi:

$$\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$



Si ha: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{C}$, essendo $\mathbf{C} = \{5, 6, 7\}$.
I numeri 5, 6 e 7 sono infatti comuni ai due insiemi.

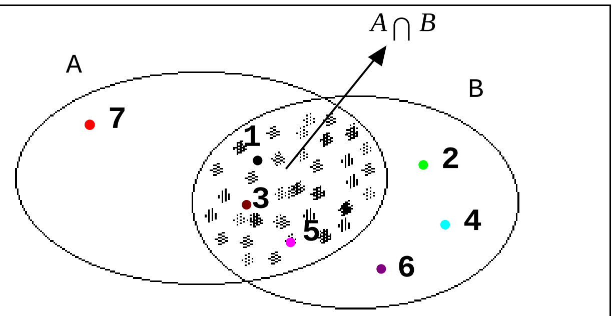
Graficamente l'insieme intersezione è rappresentato dalla parte spruzzata.

$A = \{1,3,5,7\} \quad B = \{1,2,3,4,5,6\}$

$C = A \cap B = \{1,3,5\}$

Per convenzione si pone:

$A \cap \varnothing = \varnothing, \ \varnothing \cap A = \varnothing$

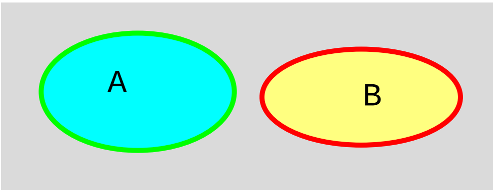


Due insiemi A e B si dicono disgiunti se non hanno elementi in comune, cioè se $A \cap B = \varnothing$

Immagine grafica di due insiemi **disgiunti**

$A \cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; A = \varnothing$ oppure $B = \varnothing$

oppure A e B sono **insiemi disgiunti**.



Unione di insiemi

Definiamo unione di due insiemi A e B l'insieme C costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi, cioè dagli elementi che appartengono ad A o B o ad entrambi.

(Gli elementi comuni agli insiemi A e B vanno presi una sola volta). In simboli abbiamo:

$$\mathbf{C = A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}}$$

e si legge <<U uguale A unito B >>. Qui il significato di **oppure** ($\vee$)non ha valore esclusivo, cioè il significato di $\vee$ è quello di **vel** latino e non di aut. Quindi un elemento appartiene all'unione se:

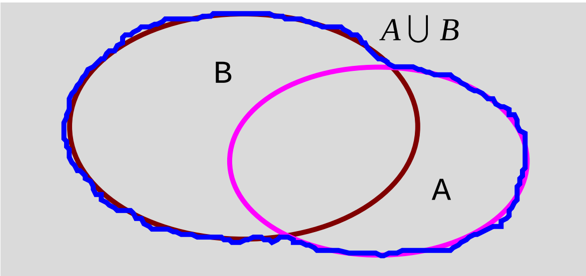
1) appartiene ad A 2) oppure appartiene a B 3) oppure appartiene ad entrambi gli insiemi.

$\bigcup$ è il simbolo di unione.

$A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ $\Rightarrow$ $C = A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

$A = \{2,3,4,7\}$, $B = \{5,9\}$ $\Rightarrow$ $C = A \cup B = \{2,3,4,5,7,9\}$

La parte di piano delimitata dal contorno azzurro a tratto pieno rappresenta $A \cup B$



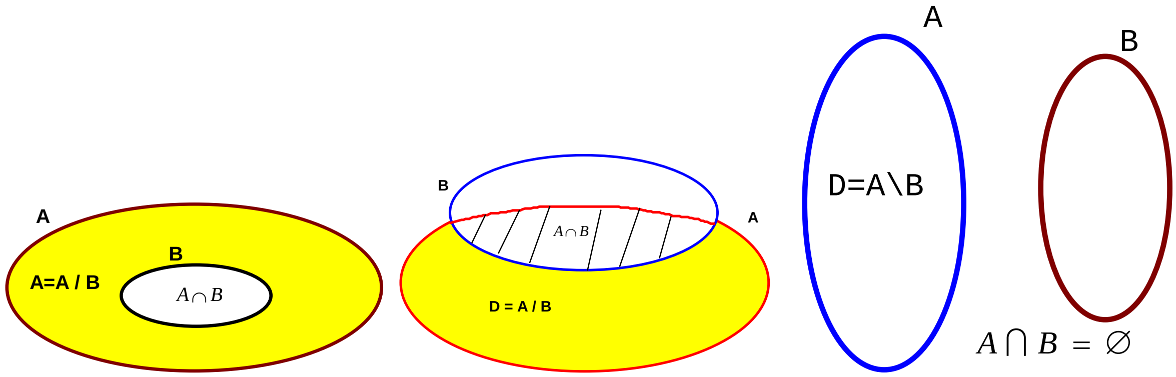
Differenza di insiemi Insieme complementare

Si dice differenza di due insiemi A e B (in questo ordine) l'insieme D costituito dagli elementi dell'insieme A che non appartengono all'insieme B. In simboli abbiamo:

$$\mathbf{D = A \setminus B = A - B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}}$$

e si legge << **D uguale A meno B** >> .

I seguenti **diagrammi di Eulero-Venn** visualizzano la situazione nei vari casi. La differenza è rappresentata dalla parte di piano riempita con lo spruzzo.



$\forall\ A$ risulta : $A - \varnothing = A$, $A - A = \varnothing$, $A - B \neq B - A$

Se in particolare risulta $A \subset B$ allora l'insieme differenza $D = A \setminus B$ si dice il complementare di B rispetto ad A, si scrive $C_A B$ (vedere **primo diagramma di Eulero-Venn**) e si indica con $\mathbf{C_A B = A \setminus B = \{ x : x \in A \ \wedge \ x \in B \}}$

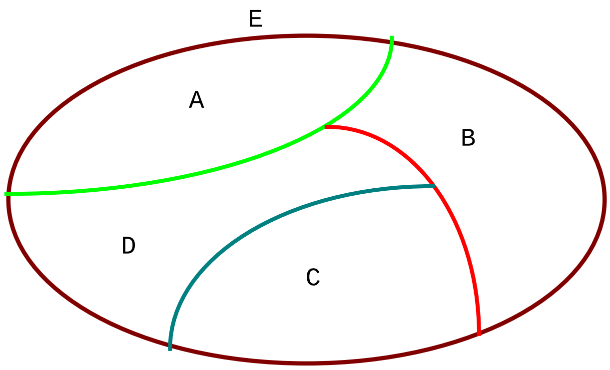
e si legge: <<differenza complementare di B rispetto ad A>>

Partizione di un insieme

Dato un insieme E consideriamo i suoi sottoinsiemi A, B, C, D, che verificano le seguenti condizioni: 1) nessuno dei sottoinsiemi è vuoto 2) due sottoinsiemi distinti sono **disgiunti**, cioè la loro intersezione è l'insieme vuoto 3) l'unione di tali sottoinsiemi è l'insieme dato E. In tali condizioni si dice che i sottoinsiemi A, B, C, D, costituiscono una **partizione** dell'insieme E.

- L'insieme dei numeri naturali pari e quello dei **numeri naturali dispari** costituiscono una partizione dell'insieme dei numeri naturali.

I sottoinsiemi A, B, C, D, costituiscono una partizione dell'insieme E perché sono insiemi non vuoti a due a due disgiunti e la loro unione è l'insieme E



Coppie ordinate

Siano dati due insiemi A e B non vuoti. Col simbolo (a,b) con $a \in A$, $b \in B$ indichiamo una coppia ordinata avente come prima componente (o primo elemento) un elemento $a \in A$ e come seconda componente (o secondo elemento) un elemento $b \in B$. Non bisogna fare confusione tra la coppia ordinata (a,b) e l'insieme $\{a,b\}$. Nella coppia ordinata (a,b) è essenziale l'ordine in cui vengono considerate le componenti, mentre nell'insieme $\{a,b\}$ l'ordine in cui si considerano gli elementi non ha importanza.

Prodotto cartesiano

Siano A e B due insiemi non vuoti (distinti o non). Si chiama prodotto cartesiano di A per B e si indica col simbolo $A \times B$ (si legge A cartesiano B oppure A per B) un nuovo insieme che ha per elementi tutte le coppie ordinate che hanno come prima componente un elemento di A e come seconda componente un elemento di B, cioè: $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

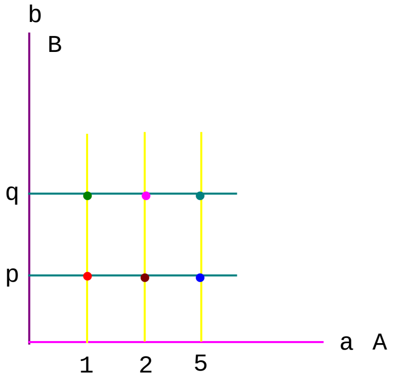
$A \times B$ = prodotto cartesiano **di A per B**

Definizione: Si chiama prodotto cartesiano di due insiemi A e B l'insieme formato da tutte le coppie ordinate che si ottengono prendendo come primo elemento un elemento di A e come secondo elemento un elemento di B .

Graficamente un prodotto cartesiano può essere rappresentato mediante una tabella a doppia entrata o mediante un reticolo.

Rappresentazione reticolare di un prodotto cartesiano

Gli elementi (coppie ordinate) di un prodotto cartesiano possono essere indicati mediante i nodi delle maglie di un reticolo. Conviene disegnare due semirette fra loro ortogonali e con l'origine in comune, rappresentando sulla semiretta orizzontale a gli elementi dell'insieme A e sulla semiretta verticale b tutti gli elementi dell'insieme B.



Rappresentazione reticolare del prodotto cartesiano

$$\mathbf{A \times B = \{(1,p),(1,q),(2,p),(2,q),(3,p),(3,q)\}}$$

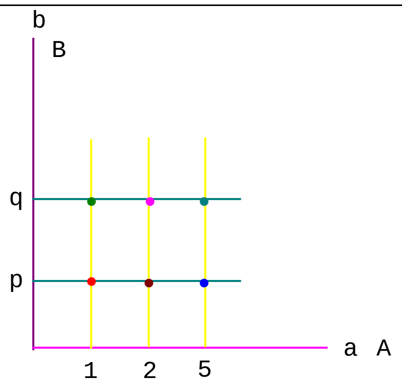
quando $A = \{1,2,5\}$ e $B = \{p,q\}$

Le rette condotte per i punti di a che rappresentano gli elementi di A parallele alla semiretta b e le rette condotte per i punti di b che rappresentano gli elementi di B parallele alla semiretta a individuano dei **nodi** che rappresentano simbolicamente gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B$.

Poiché nel prodotto cartesiano l'ordine è importante, può essere utile convenire di considerare come **primo insieme** A quello rappresentato sulla semiretta a disposta orizzontalmente ed il **secondo insieme** B sulle semiretta b disposta verticalmente.

Rappresentazione reticolare di un prodotto cartesiano

Gli elementi (coppie ordinate) di un prodotto cartesiano possono essere indicati mediante i **nodi** delle maglie di un reticolo. Conviene disegnare due semirette fra loro ortogonali e con l'origine in comune, rappresentando sulla semiretta orizzontale a gli elementi dell'insieme A e sulla semiretta verticale b tutti gli elementi dell'insieme B.



Rappresentazione reticolare del prodotto cartesiano

$$A \times B = \{(1,p),(1,q),(2,p),(2,q),(5,p),(5,q)\}$$

quando $A = \{1,2,5\}$ e $B = \{p,q\}$

Le rette condotte per i punti di a che rappresentano gli elementi di A parallele alla semiretta b e le rette condotte per i punti di b che rappresentano gli elementi di B parallele alla semiretta a individuano dei nodi che rappresentano simbolicamente gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B$.

Poiché nel prodotto cartesiano l'ordine è importante, può essere utile convenire di considerare come primo insieme A quello rappresentato sulla semiretta a disposta orizzontalmente ed il secondo insieme B sulle semiretta b disposta verticalmente.

Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B può essere visualizzato anche mediante una tabella rettangolare, detta **tabella a doppia entrata**.

	p	q
1	$(1,p)$	$(1,q)$
2	$(2,p)$	$(2,q)$
5	$(5,p)$	$(5,q)$

Visualizzazione del **prodotto cartesiano** $A \times B$ mediante una tabella a doppia entrata quando $A = \{1,2,5\}$ e $B = \{p,q\}$

$$\mathbf{A \times B = \{(1,p),(1,q),(2,p),(2,q),(3,p),(3,q)\}}$$

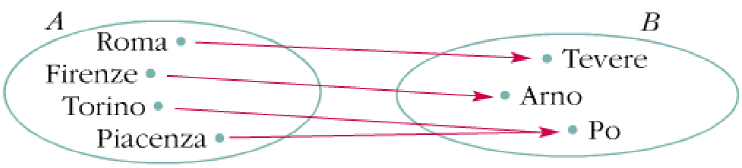
Corrispondenze tra insiemi

Consideriamo gli insiemi $\mathbf{A = \{Roma, Firenze, Torino, Piacenza\}}$ e $\mathbf{B = \{Tevere, Arno, Po\}}$.

Vediamo quale **legame** esiste tra gli insiemi A e B se vogliamo mettere in evidenza le città che sono attraversate da un fiume.

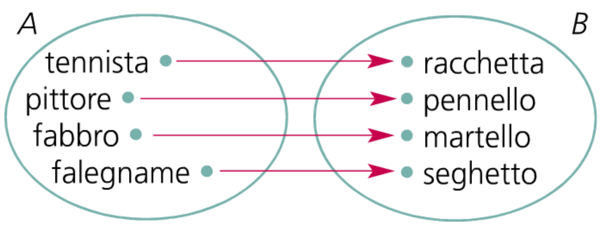
Tra due insiemi A e B si stabilisce una **corrispondenza** se è fissata una proprietà che associa elementi di A a elementi di B.

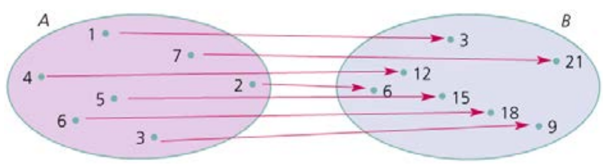
Una **corrispondenza** tra due insiemi si dice **univoca** se associa a ogni elemento del primo insieme un solo elemento del secondo, ma non viceversa.



Una **corrispondenza** tra due insiemi si dice **biunivoca** se associa a ogni elemento del primo insieme un solo elemento del secondo e, viceversa, ogni elemento del secondo insieme è corrispondente di un solo elemento del primo insieme.

Esempi di corrispondenze biunivoche





Relazione tra due insiemi

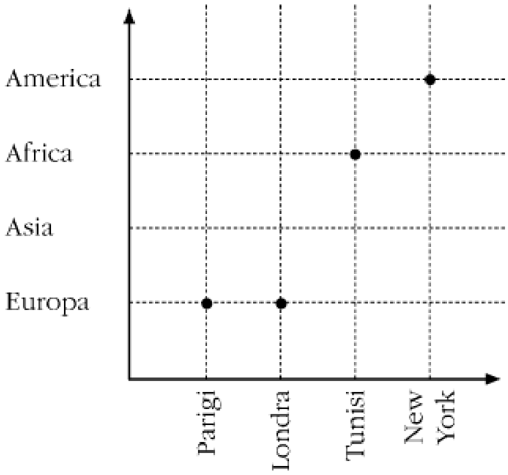
Dati due insiemi non vuoti A e B spesso è possibile fornire dei criteri o stabilire delle proprietà che collegano qualche elemento di A con qualche elemento di B, dove la parola <<qualche >> vuole dire che almeno un elemento di A è legato a qualche elemento di B. Diciamo, in questo caso, che l'insieme A è in relazione con l'insieme B.

Definizione: Si dice relazione tra due insiemi A e B quando esiste un criterio che associa elementi di A ad elementi di B, cioè quando esiste una proprietà, indicata col simbolo $\Re$, verificata da certe coppie ordinate $(\mathbf{a,b})$, con $\mathbf{a \in A}$ e $\mathbf{b \in B}$.

Se la coppia (a,b) verifica la relazione $\Re$ scriviamo $a \Re b$ oppure $\Re(a,b)$, volendo intendere con ciò che il generico elemento a dell'insieme A è in relazione $\Re$ col generico elemento b dell'insieme B. Se la coppia (a,b) non verifica la relazione $\Re$ scriviamo: $a \not\Re b$ oppure $\overline{a \Re b}$

Concludendo possiamo affermare che una relazione fra due insiemi A e B è un insieme di coppie ordinate il cui primo termine è un elemento di A ed il secondo termine è un elemento di B e, quindi, dire di conoscere la relazione $\Re$ significa conoscere l'insieme delle coppie (a,b) che verificano la relazione $\Re$. Una relazione $\Re$ può essere rappresentata mediante una tabella a doppia entrata o mediante una rappresentazione reticolare.

$\Re$	Europa	Asia	Africa	America
Parigi	○			
Londra	○			
Tunisi			○	
New York				○



Elogio della matematica

Nessun altro studio richiede meditazione più pacata;

nessun altro meglio induce ad essere cauti nell'affermare,

semplici ed ordinati nell'argomentare,

precisi e chiari nel dire;

e queste semplicissime qualità sono sì rare

che possono bastare da sole ad elevare chi ne è dotato

molto al di sopra della maggioranza degli uomini.

Perciò io esorto a studiare matematica

pur chi si accinga a divenire avvocato o economista,

filosofo o letterato; perché io credo

e spero che non gli sarà inutile sapere bene ragionare

e chiaramente esporre .

Alessandro Padoa