Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti.

1. E' dato il triangolo AOB, rettangolo in O, del quale sia h l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta x l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$ e posto $tg\frac{x}{2}=t$ si esprima per mezzo di h e di t il perimetro del triangolo e si studi l'andamento della funzione di t così ottenuta.

$$\overline{OA}=\frac{h}{\sin x}\ ;\quad \overline{OB}=\frac{h}{\cos x}\ ;\quad \overline{AB}=\frac{\overline{OA}}{\cos x}=\frac{h}{\sin x\cos x}$$

$$2p=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=h\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}\right)$$

$$\text{Ma: } \sin x=\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\ ;\quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\quad \text{quindi:}$$

$$y(t)=2p=h\left[\frac{1+t^2}{2t}+\frac{1+t^2}{1-t^2}+\frac{(1+t^2)^2}{2t(1-t^2)}\right]=$$

$$=h\left[\frac{1-\cancel{t^4}+2t+2t^3+1+\cancel{t^4}+2t^2}{2t(1-t^2)}\right]=h\left[\frac{2+2t+2t^2+2t^3}{2t(1-t^2)}\right]=$$

$$=h\left[\frac{2(1+t)(1+t^2)}{2t(1+t)(1-t)}\right]=\frac{h(1+t^2)}{t(1-t)}\ ;\quad \boxed{y(t)=\frac{h(1+t^2)}{t(1-t)}}$$

Altro metodo

$$2p=\overline{AO}+\overline{AH}+\overline{HB}+\overline{OB}=\frac{h}{\sin x}+\frac{h}{tg x}+h\,tg x+\frac{h}{\cos x}=$$

$$=h\left[\frac{1+t^2}{2t}+\frac{1-t^2}{2t}+\frac{2t}{1-t^2}+\frac{1+t^2}{1-t^2}\right]=h\left[\frac{1}{t}+\frac{1+t}{1-t}\right]=\frac{h(1+t^2)}{t(1-t)}$$

con $0<x<90^0$, $0<\frac{x}{2}<45^0$; $0<t<1$

Dobbiamo studiare una funzione razionale fratta.
Se non teniamo conto che x è angolo acuto di un triangolo rettangolo allora il campo di esistenza di $y(t)$ è costituito dai tre intervalli: $t<0$; $0<t<1$; $t>1$
In caso contrario la funzione ha come campo di esistenza l'intervallo $0<t<1$.
Noi studieremo la funzione in generale.

$y(t)>0$ per $0<t<1$; $y(t)<0$ per $t<0$ e $t>1$

Le rette di equazione $t=0$; $t=1$ sono <u>asintoti verticali</u> in quanto: $\lim_{x\to 0} y(t)=\infty$ $\lim_{x\to 1} y(t)=\infty$

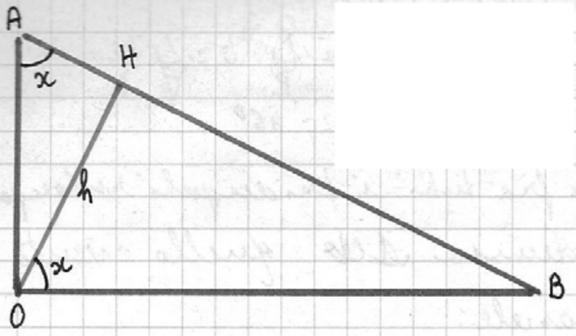
più precisamente:

$\lim_{x\to 0-} y(t)=-\infty$, $\lim_{x\to 0+} y(t)=+\infty$; $\lim_{x\to 1-} y(t)=+\infty$; $\lim_{x\to 1+} y(t)=-\infty$

come si deduce facilmente tenendo presente la variazione del segno di $y(t)$.
La retta di equazione $y=-h$ è un asintoto orizzontale in quanto:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{h(1+t^2)}{t-t^2}=h\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^2}+1}{\frac{1}{t}-1}=-h$$

Campo di variabilità della funzione:
$yt-yt^2=h+ht^2$; $(h+y)t^2-yt+h=0$
$\Delta=y^2-4h^2-4hy\geq 0$ per $y\leq 2(1-\sqrt{2})h$; $y\geq 2(1+\sqrt{2})h$



Per studiare la posizione del grafico della curva di equazione $y = \frac{h(1+t^2)}{t(1-t)}$ rispetto all'asintoto basta studiare il segno della funzione

$$d(t) = \frac{h(1+t^2)}{t(1-t)} - (-h) = = h \cdot \frac{1+t}{t(1-t)}$$

che si ottiene come differenza fra le ordinate dei punti di uguale ascissa appartenenti al grafico ed all'asintoto.

t		-1		0		$+1$	
$1+t$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$t(1-t)$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
$d(t)$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	$\times$	$-$

Pertanto negli intervalli $t < -1$, $0 < t < 1$ il grafico della curva si trova al di sopra dell'asintoto, mentre negli intervalli $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$ il grafico della curva si trova al di sotto dell'asintoto. Per $t = -1$ grafico ed asintoto hanno un punto in comune, precisamente il punto $R \equiv (-1, -h)$

La curva non ha punti comuni con gli assi cartesiani.

Calcoliamo la $y'(t)$ e studiamo il suo segno per vedere se la curva presenta punti di massimo o di minimo.

$$y'(t) = h \cdot \frac{2t^2(1-t) - (1+t^2)(1-2t)}{t^2(1-t)^2} = h \cdot \frac{2t^2 - 2t^3 - 1 + 2t - t^2 + 2t^3}{t^2(1-t)^2} =$$

$$= h \cdot \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2(1-t)^2} \qquad y'(t) = 0 \Longrightarrow t_1 = -(1+\sqrt{2}) \; ; \; t_2 = -1+\sqrt{2}$$

$y'(t) > 0$ per $t < -(1+\sqrt{2})$ e $t > -1+\sqrt{2}$; $y'(t) < 0$ per $-(1+\sqrt{2}) < t < -1+\sqrt{2}$

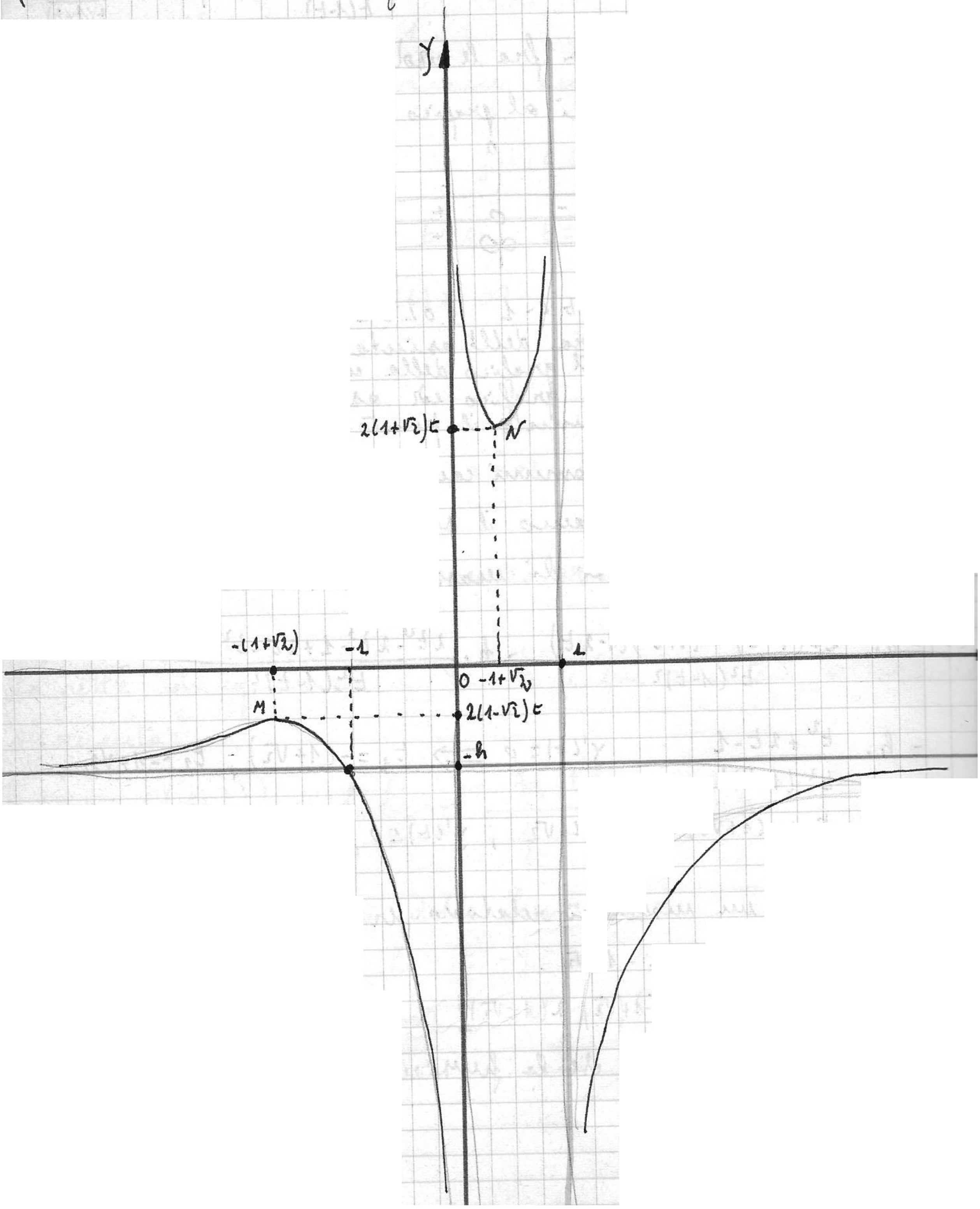
La funzione ha un massimo relativo per $t = -(1+\sqrt{2})$ ed un minimo relativo per $t = -1+\sqrt{2}$.

$M \equiv [-(1+\sqrt{2}), 2(1-\sqrt{2})]$; $N \equiv [-1+\sqrt{2}, 2(1+\sqrt{2})]$

Calcolando la $y''(t)$ si vede che la funzione $y(t)$ presenta un solo punto di flesso

$$y''(t) = h \cdot \frac{t^3 + 3t^2 - 3t + 1}{(t - t^2)^3}$$

Il perimetro è minimo per $t = -1+\sqrt{2}$ ma $t = tg\frac{x}{2}$
quindi $tg\frac{x}{2} = -1+\sqrt{2}$; $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{8}$ $x = \frac{\pi}{4}$; $x = 45°$
e quindi possiamo affermare che fra tutti i triangoli rettangoli di data altezza relativa all'ipotenusa ~~Allo~~ quello avente perimetro minimo è quello isoscele.



2. Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio assegnato, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.

Risoluzione trigonometrica

Sia ABC un triangolo isoscele iscritto in una circonferen di centro O e raggio r.

Ponendo $B\hat{A}C = \vartheta$ abbiamo: $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AR}\cos\frac{\vartheta}{2} = 2r\cos\frac{\vartheta}{2}$

$\overline{BC} = 2\overline{BQ} = 2\overline{AB}\sin\frac{\vartheta}{2} = 4r\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} = 2r\sin\vartheta$

$\overline{AQ} = \overline{AB}\cos\frac{\vartheta}{2} = 2r\cos^2\frac{\vartheta}{2} = 2r\cdot\frac{1+\cos\vartheta}{2} = r(1+\cos\vartheta)$

Pertanto la funzione di cui dobbiamo calcolare il massimo è:

$y(\vartheta) = \overline{AQ} + 2\overline{BC} = r(1+\cos\vartheta) + 4r\sin\vartheta$ ①

vedere pag 12

$y(\vartheta) = r(\cos\vartheta + 4\sin\vartheta + 1)$ ① con $0 < \vartheta < 180°$

$y'(\vartheta) = r(-\sin\vartheta + 4\cos\vartheta)$ $\quad y'(\vartheta) = 0 \Longrightarrow \sin\vartheta = 4\cos\vartheta$

$tg\,\vartheta = 4$; $\quad \vartheta_0 = arctg\,4$; $\quad \vartheta_0 \cong 75°58'$ e quindi $\vartheta_0 \in (0, 90$

$y''(\vartheta) = -r(\cos\vartheta + 4\sin\vartheta)$ ma per $\vartheta \in (0, 90°)$ abbiamo

$\sin\vartheta = \frac{tg\,\vartheta}{\sqrt{1+tg^2\vartheta}} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$; $\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$ per cui

$y''(\vartheta_0) = -r\left(\frac{\sqrt{17}}{17} + \frac{16\sqrt{17}}{17}\right) = -r\sqrt{17} < 0$

$\vartheta = \vartheta_0 = arctg\,4$ è un punto di massimo relativo per la fun $y(\vartheta)$.

$y(\vartheta_0) = r\left(\frac{\sqrt{17}}{17} + \frac{16\sqrt{17}}{17} + 1\right) = r\left(1+\sqrt{17}\right)$

Vediamo se $y(\theta_0)$ è un massimo assoluto. Nell'intervallo $(0, 180°)$ $y(\theta)$ è una funzione finita e continua e quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass ammette il massimo assoluto.

$y(0) = 2r$, $y(180°) = 0$;

$y(180°) < y(0°) < y(\theta_0) \Rightarrow y(\theta_0)$ massimo assoluto

Risoluzione algebrica

Poniamo $\overline{AQ} = x$ con $0 < x < 2r$. Applicando al triangolo rettangolo ABR il secondo teorema di Euclide, possiamo esprimere $\overline{BQ}$ in funzione di r e di x. $\overline{BQ} = \sqrt{x(2r-x)}$

Si tratta pertanto di calcolare il massimo della funzione irrazionale:

$$y = x + 4\sqrt{x(2r-x)} \quad \text{con } 0 < x < 2r \qquad ②$$

$$y'(x) = 1 + 4 \cdot \frac{2r - 2x}{2\sqrt{x(2r-x)}} = 1 + \frac{4(r-x)}{\sqrt{x(2r-x)}}$$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x(2r-x)} + 4(r-x) = 0 \quad \text{cioè: } \sqrt{-x^2+2rx} = 4(x-r) \qquad ③$$

Si tratta di una equazione irrazionale le cui radici coincidono con le radici del seguente sistema misto:

$$\begin{cases} -x^2 + 2rx = 16(x-r)^2 \\ x \geq r \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 17x^2 - 34rx + 16r^2 = 0 \\ x \geq r \end{cases}$$

$$x = r\left(\frac{17 \pm \sqrt{17}}{17}\right)$$ L'unica radice che risolve l'equazione irrazionale ③ è:

$$x_2 = \frac{r(17 + \sqrt{17})}{17} > r$$

Per stabilire se x_2 è un punto di massimo bisogna calcolare la derivata seconda di $y(x)$.

$$y''(x) = 4 \cdot \frac{(-1)\sqrt{x(2r-x)} - (r-x)\cdot\frac{2r-2x}{2\sqrt{2rx-x^2}}}{x(2r-x)} = -4 \cdot \frac{x(2r-x)+(r-x)^2}{x(2r-x)\sqrt{x(2r-x)}} =$$

$$= \frac{-4r^2}{x(2r-x)\sqrt{x(2r-x)}}$$

Si tratta di una funzione negativa in quanto valgono le limitazioni (2).

$x_2 = \left(\frac{17+\sqrt{17}}{17}\right) r$ è pertanto un punto di massimo (assoluto) per la funzione $y(x)$.

$$y''(x_2) = -\frac{17\sqrt{7}}{16r} < 0$$

Tenendo presente che: $\begin{cases} \sqrt{x_2(2r-x_2)} = 4(x_2-r) \\ x_2 - r = \frac{r\sqrt{17}}{17} \end{cases}$ abbiamo:

$$y(x_2) = x_2 + 4\sqrt{x_2(2r-x_2)} = x_2 + 4(x_2-r) = r + \frac{r\sqrt{17}}{17} + \frac{16\sqrt{17}}{17} r =$$

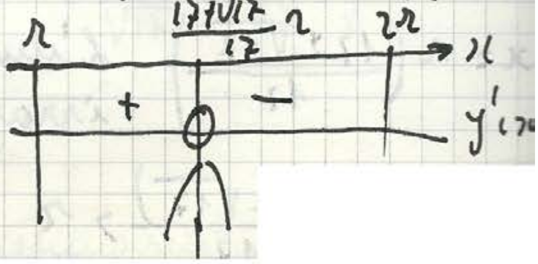
$$= (1+\sqrt{17})r$$

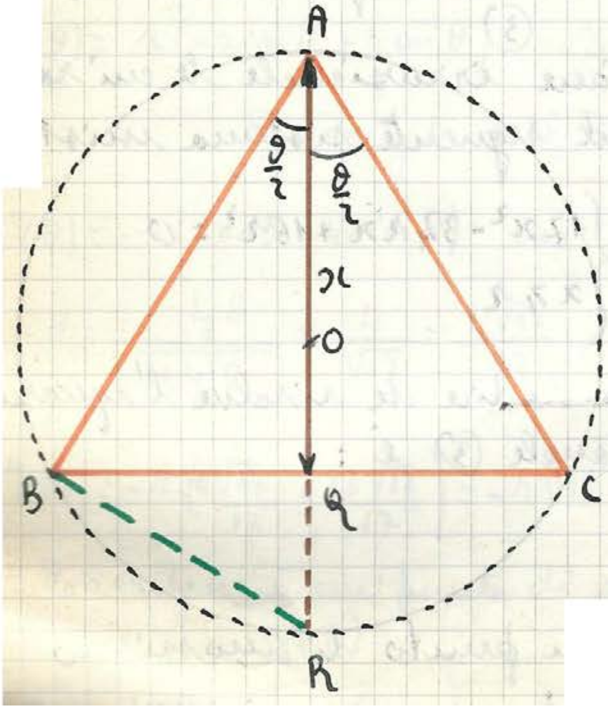
$$y'(x) > 0 \Rightarrow \sqrt{-x^2+2rx} > 4(x-r)$$

se $x > r$ abbiamo:

$$17x^2 - 34rx + 16r^2 < 0 \text{ per}$$

$$\left(\frac{17-\sqrt{17}}{17} r\right) < x < \frac{17+\sqrt{17}}{17} r$$





Altra risoluzione algebrica

Il problema può essere risolto anche senza l'uso delle derivate in base alle seguenti considerazioni:

(4) $y = x + 4\sqrt{x(2r-x)} \Longrightarrow 4\sqrt{x(2r-x)} = y - x \Longleftrightarrow \begin{cases} 16(2rx - x^2) = (y-x)^2 \\ y > x \end{cases}$ sempre in quanto

$$17x^2 - 2(y+16r)x + y^2 = 0 \qquad (5)$$

questa equazione di secondo grado in x ammette radici reali se:

$$\frac{\Delta}{4} = (y+16r)^2 - 17y^2 \geq 0 \text{ cioè per } (1-\sqrt{17})r \leq y \leq (1+\sqrt{17})\cancel{y}\, r$$

Ma y è una quantità positiva per cui possiamo affermare che x è reale se: $0 < y \leq r(1+\sqrt{17})$

Pertanto il valore massimo che può assumere y è: $(1+\sqrt{17})r$ in corrispondenza del quale, troviamo per x, il valore:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{y+16r}{17} = \frac{(17+\sqrt{17})}{17}r$$

La suddetta risoluzione algebrica è suscettibile della seguente interpretazione analitica.

Se (x, y) rappresentano le coordinate cartesiane di un punto di un piano allora l'equazione (4) rappresenta l'arco di una conica avente equazione

$$17x^2 - 2xy + y^2 - 32rx = 0$$

ed appartenente al semipiano $y > 0$.

Si tratta di individuare un punto di tale arco avente ordinata massima. Tale punto coincide col punto di tangenza dell'arco di conica con la retta $y = K$.

$$\begin{cases} 17x^2 - 2xy + y^2 - 32rx = 0 \\ y = K \end{cases} \qquad 17x^2 - 2(K+16r)x + K^2 = 0$$

$\frac{\Delta}{4} = -16(K^2 - 2rK - 16r^2) = 0$; $K_1 = (1-\sqrt{17})r$ valore da scartare

$K_2 = (1+\sqrt{17})r$

In corrispondenza di K_2 troviamo:

$$x = -\frac{b}{2a} = \left(\frac{17+\sqrt{17}}{17}\right) r$$

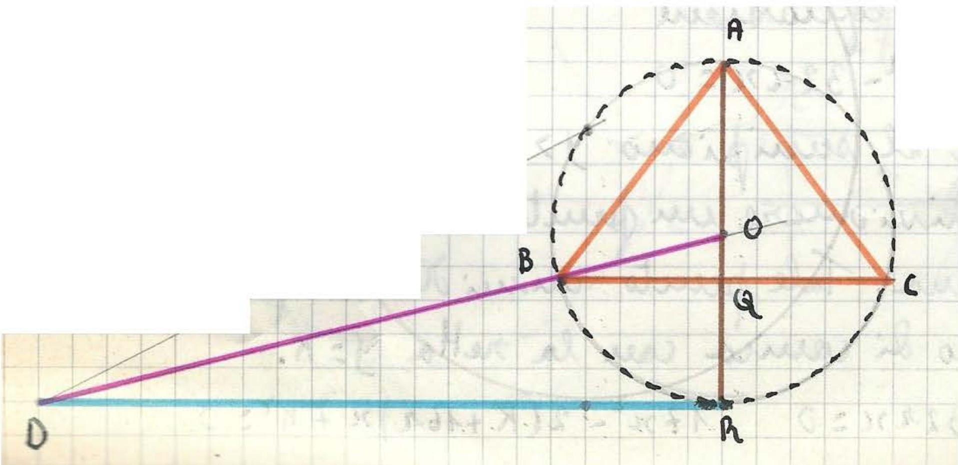
N.B. $\overline{BQ} = \sqrt{\overline{AQ} \cdot \overline{QR}} = \sqrt{x_2(2r - x_2)} = \frac{4\sqrt{17}}{17} r$

$\overline{OQ} = x_2 - r = \frac{\sqrt{17}}{17} r \qquad \frac{\overline{BQ}}{\overline{OQ}} = 4$

Questa circostanza ci consente di costruire facilmente il triangolo richiesto dal problema.

Infatti basta costruire perpendicolarmente al diametro il segmento $\overline{DR} = 2\overline{AB} = 4r$ e ~~congiungere~~ B punto d'intersezione della circonferenza col segmento OD è uno dei vertici della base del triangolo richiesto.

Infatti: $O\hat{R}D \; [\sim] \; O\hat{B}Q \Rightarrow \frac{\overline{BQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{DR}}{\overline{OR}} = 4$



Risoluzione geometrica

Si prolunghi l'altezza AQ dalla parte di Q e si prenda il punto M tale che sia : $QM = 2BC$.

Congiungendo M con A si ottengono due triangoli isosceli ABC ed A'B'C' che hanno l'altezza ed il doppio della base uguale al segmento $AM = a$.

Se t è una delle due semirette tangenti alla circonferenza Γ nel punto B_0 possiamo affermare che: $t \parallel MB$

$$\left.\begin{array}{l} AQ = \frac{1}{4} QM \\ M\hat{A}T \, [\sim] \, M\hat{Q}B \end{array}\right\} \Rightarrow AT = \frac{1}{4} AM$$

Viceversa se sulla circonferenza Γ di centro O tracciamo la semiretta AM passante per O ed avente come origine un qualsiasi punto A di Γ e poi la semiretta t tangente a Γ in A e se prendiamo $AM = a$ ed $AT = \frac{1}{4}a$ congiungendo M con T su Γ, in generale, si individuano due triangoli isosceli che hanno come somma dell'altezza e del doppio della base il segmento $AM = a$.

AM è massimo quando la retta MT risulta tangente a Γ.

Poiché deve sempre essere $\frac{AM}{AT} = 4$ tutte le rette MT saranno fra loro parallele.

$$A\hat{T_0}M_0 \, [\sim] \, O\hat{B_0}M_0 \Rightarrow \frac{\overline{M_0B_0}}{\overline{OB_0}} = \frac{\overline{AM_0}}{\overline{AT_0}} = 4 \Rightarrow \overline{B_0M_0} = 4r$$

$$\overline{OM_0} = \sqrt{16r^2 + r^2} = r\sqrt{17} \quad ; \quad \overline{AM_0} = r + r\sqrt{17} = (1+\sqrt{17})r$$

$$\overline{M_0Q_0} = \frac{\overline{B_0M_0}^2}{\overline{OM_0}} = \frac{16r^2}{r\sqrt{17}} = \frac{16\sqrt{17}}{17} r$$

$$\overline{AQ_0} = \overline{AM_0} - \overline{M_0Q_0} = r + r\frac{\sqrt{17}}{17} = \left(\frac{1+\sqrt{17}}{17}\right) r$$

□ $\frac{y}{r} = \cos\vartheta + tg\,\alpha \sin\vartheta + 1 =$ $\qquad tg\,\alpha = 4$

$= \frac{\cos\vartheta\cos\alpha + \sin\vartheta\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos\alpha}\cos(\vartheta - \alpha) + 1$

Il massimo della funzione $y(\vartheta)$ coincide col massimo della funzione $\cos(\vartheta-\alpha)$. Questo massimo si ottiene per $\cos(\vartheta-\alpha) = 1$; $\vartheta - \alpha = 0$ $\vartheta = \alpha = arctg\,4$

□ Metodo indiretto

$$\frac{y}{r} = \frac{1 - tg^2\frac{\vartheta}{2}}{1 + tg^2\frac{\vartheta}{2}} + \frac{8\,tg\frac{\vartheta}{2}}{1+tg^2\frac{\vartheta}{2}} + 1$$

$$y\,tg^2\frac{\vartheta}{2} - 8r\,tg\frac{\vartheta}{2} + y - 2r = 0$$

Le radici di questa equazione sono reali se:

$$\frac{\Delta}{4} = 16r^2 - y^2 + 2ry = -y^2 + 2ry + 16r^2 \geq 0$$ cioè per

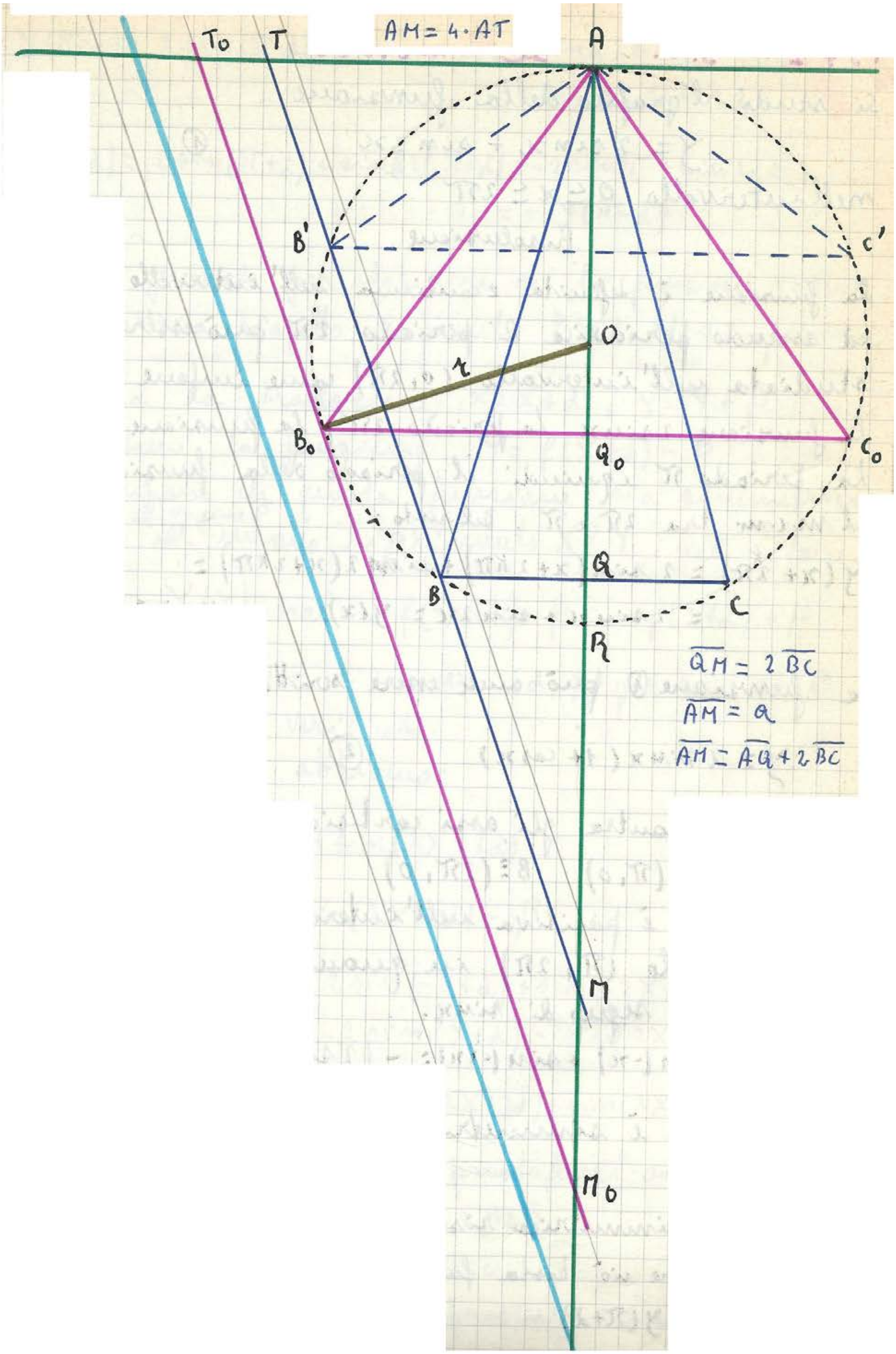
$$(1-\sqrt{17})r \leq y \leq (1+\sqrt{17})r$$

Il massimo valore di y vale $(1+\sqrt{17})r$ e si ottiene in corrispondenza di: $tg\frac{\vartheta}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{8r}{2y} = \frac{4r}{y} = \frac{4r}{1+\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$

$$tg\,\vartheta = \frac{2\,tg\frac{\vartheta}{2}}{1 - tg^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}{1 - \frac{17+1-2\sqrt{17}}{16}} = \frac{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}{\frac{16-18+2\sqrt{17}}{16}} = \frac{8(\sqrt{17}-1)}{2(\sqrt{17}-1)} = 4$$

□ $\cos\vartheta + 4\sin\vartheta + 1 - Y = 0$ $\qquad \frac{|1-Y|}{\sqrt{1+16}} \leq 1 \Rightarrow$

$$-\sqrt{17} \leq 1 - Y \leq \sqrt{17} \Rightarrow 1-\sqrt{17} \leq Y \leq 1+\sqrt{17}$$


AM = 4·AT
A
T₀
T
B'
C'
O
r
B₀
Q₀
C₀
Q
B
C
R
QM = 2 BC
AM = a
AM = AQ + 2 BC
M
M₀

Si studi il grafico della funzione $y = \sin x + \sin 2x$ nell'intervallo $[0,2\pi]$

Calcolare l'area S della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione e dalle tangenti al grafico della funzione rispettivamente nei punti di ascissa $x=0$ e $x=\frac{\pi}{3}$. Dire se esiste un punto A dell'asse delle ascisse rispetto al quale il grafico della funzione è simmetrico.

1) dom $y = [0, 2\pi]$ 2) $x=0 \Rightarrow y=0$ $O(0,0)$

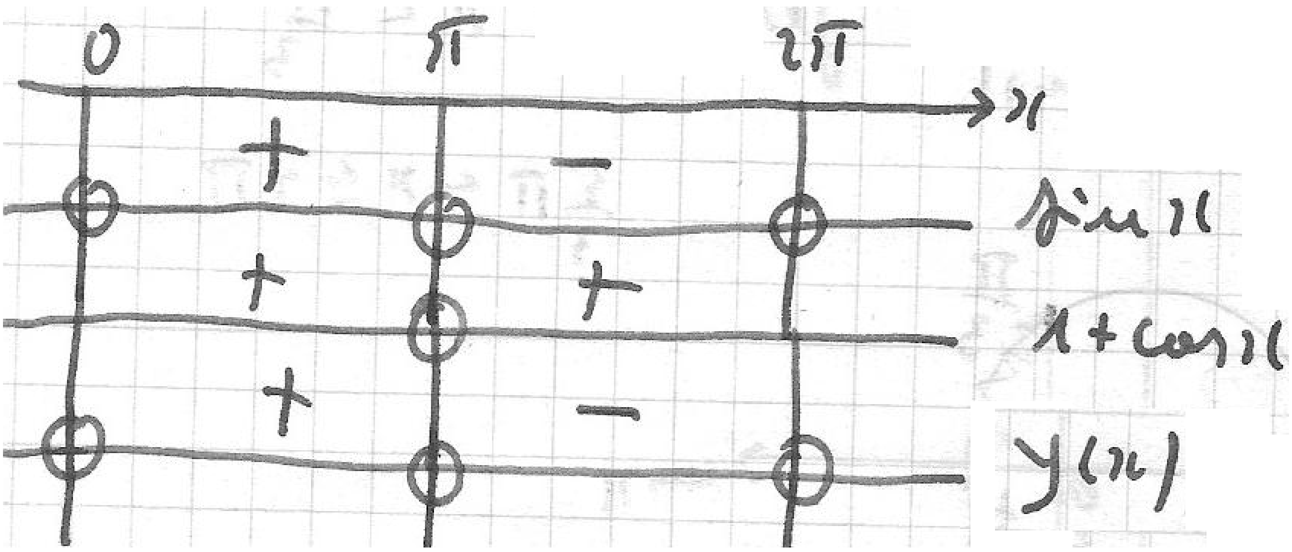
$y=0 \Rightarrow 2\sin x + \sin 2x = 0$ $2\sin x(1+\cos x)=0$

$\sin x = 0 \Rightarrow$ $x=0$ $x=\pi$ $x=2\pi$

$A(\pi,0)$ $B(2\pi,0)$; $\cos x=-1$ $x=\pi$

Il $G(y)$ incontra gli assi cartesiani nei punti $O(0,0)$, $A(\pi,0)$, $B(2\pi,0)$

3) $y(x) = 2\sin x\,(1+\cos x)$



$y(x) > 0$ per $0 < x < \pi$

$y(x) < 0$ per $\pi < x < 2\pi$

4) $y'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x =$

$= 2(\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) =$

$= 2(\cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x)$

$y'(x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1) =$

$= 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

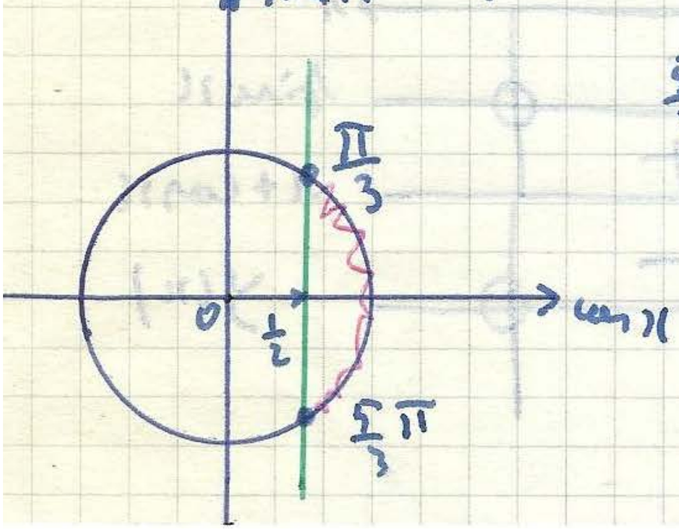
$y'(x) = 0 \Longrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

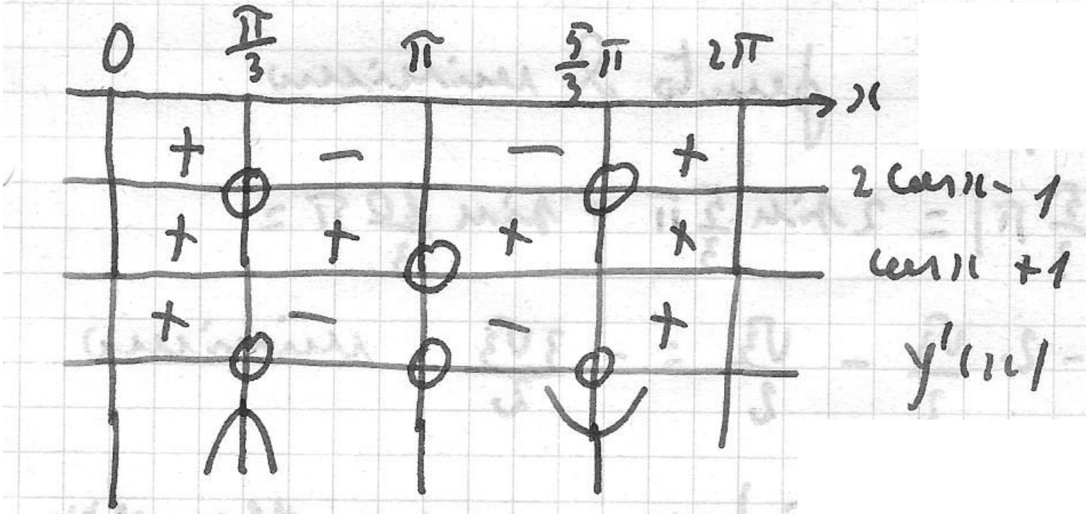
$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$y'(x) > 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 > 0 \Longrightarrow \cos x > +\frac{1}{2}$

per: $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$

$\frac{5}{3}\pi < x \leq 2\pi$





La funzione è strettamente crescente (decrescente) per $0<x<\frac{\pi}{3}$; $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$

$\left(\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi\right)$

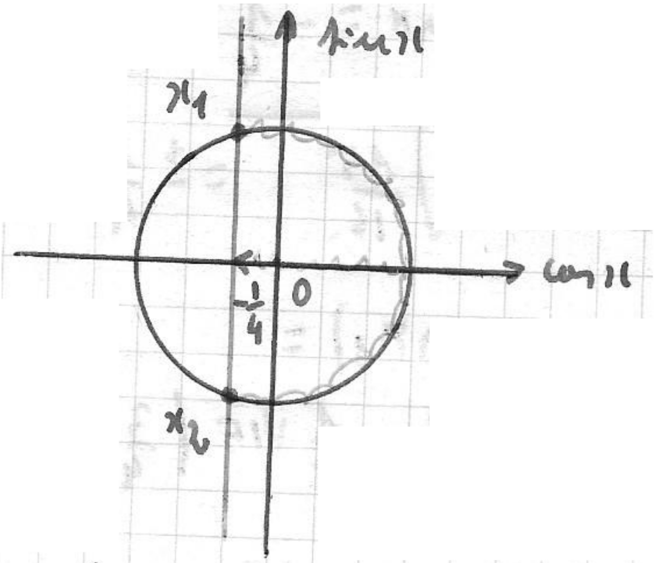
$x=\frac{\pi}{3}$ punto di massimo

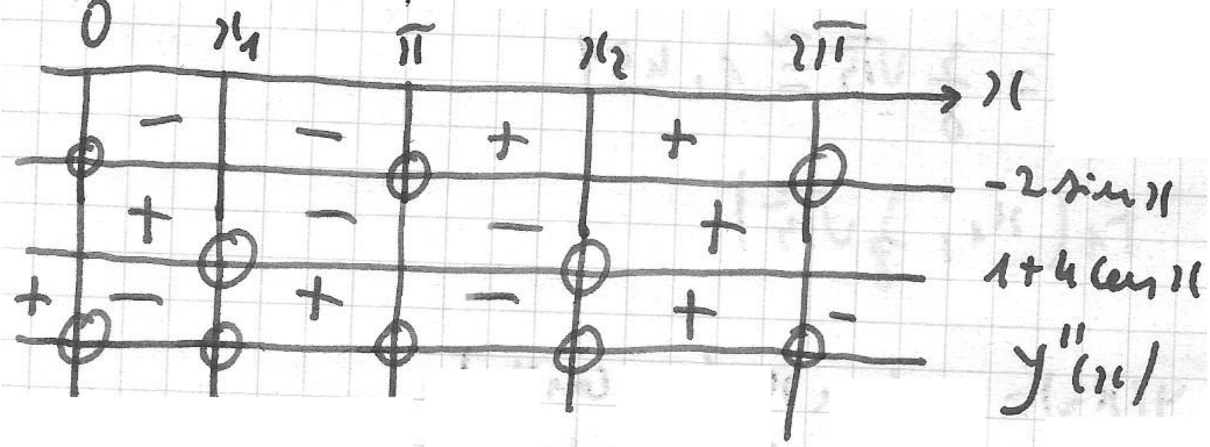
$y\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2}{3}\pi=$

$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\simeq 2,6$

massimo

$M\left(\frac{\pi}{3};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ immagine geometrica del massimo





$x = x_1$ $x = x_2$ sono due flessi ascendenti.

$x = 0$, $x = \pi$ $x = 2\pi$ sono tre flessi discendenti.

Il G(y) volge la concavità verso l'alto (il basso) per $x_1 < x < \pi$, $x_2 < x < 2\pi$ [$0 < x < x_1$, $\pi < x < x_2$]

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} \qquad \cos x = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{16}} = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{15}$$

$$y(x_1) = 2\sin x_1 (1+\cos x_1) =$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}\sqrt{15}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{15}\left(\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt{15} \cong 1,451$$

$$F_1\left(x_1 ; \frac{3}{8}\sqrt{15}\right)$$

$$y(x_2) = 2\sin x_2 (1+\cos x_2) =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{15}\left(1-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}\sqrt{15}$$

$$F_2\left(x_2 ; -\frac{3}{8}\sqrt{15}\right)$$

Il $G(y)$ presenta i seguenti flessi: O, A, B, F_1, F_2. Inoltre A è un punto di flesso a tangente orizzontale in quanto risulta $y'(\pi)=0$, con tangente di flesso coincidente con l'asse delle ascisse.

Essendo $y'(0) = y'(2\pi) = 2+2 = 4$

$y = 4x$ è la tangente inflessionale nell'origine, mentre

$y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ è la tangente in M

$y = 4x - 8\pi$ è la tangente inflessionale nel pto B

$$y'(x_1) = y'(x_2) = 2\left(\frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{9}{4}$$

$$y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{\pi}{3}\left(1+4\cos\frac{\pi}{3}\right) = -2\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+4\cdot\frac{1}{2}\right) = $$
$$= -3\sqrt{3} < 0$$

$$y''\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -2\sin\frac{5}{3}\pi\left(1+4\cos\frac{5}{3}\pi\right) = -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+4\cdot\frac{1}{2}\right) = $$
$$= 3\sqrt{3} > 0$$

Questi risultati confermano che la funzione presenta un massimo ed un minimo rispettivamente nei punti $x = \frac{\pi}{3}$ ed $x = \frac{5}{3}\pi$

$$S = \int_0^{\frac{3}{8}\sqrt{3}} 4x\,dx + \int_{\frac{3}{8}\sqrt{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sqrt{3}}{2}\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} (2\sin x + \sin 2x)\,dx =$$

$$= \left[2x^2\right]_0^{\frac{3}{8}\sqrt{3}} + \left[\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{3}{8}\sqrt{3}}^{\frac{\pi}{3}} +$$

$$+ \left[-2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{0} =$$

$-1-\frac{1}{2}$

$$= 2\cdot\frac{27}{64} + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{27}{16} - 2 - \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} +$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{27}{32} - \frac{27}{16} + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{27}{32} + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{4} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{83}{32}$$

$f(x) = 2\sin x + \sin 2x \qquad C(a;0)$

$f(x) + f(2a - x) = 0$ (1)

$G(f)$ è simmetrico rispetto al punto C se la (1) è identicamente verificata.

$2\sin x + \sin 2x +$

$2\sin(2a - x) + \sin(4a - 2x) = 0$

$2[\sin x + \sin(2a - x)] + \sin 2x + \sin(4a - 2x) = 0$

Applico le formule di prostaferesi.

$$4\sin a \cos(x - a) + 2\sin(\quad + 2a) \cdot \cos(2x - 2a) = 0$$

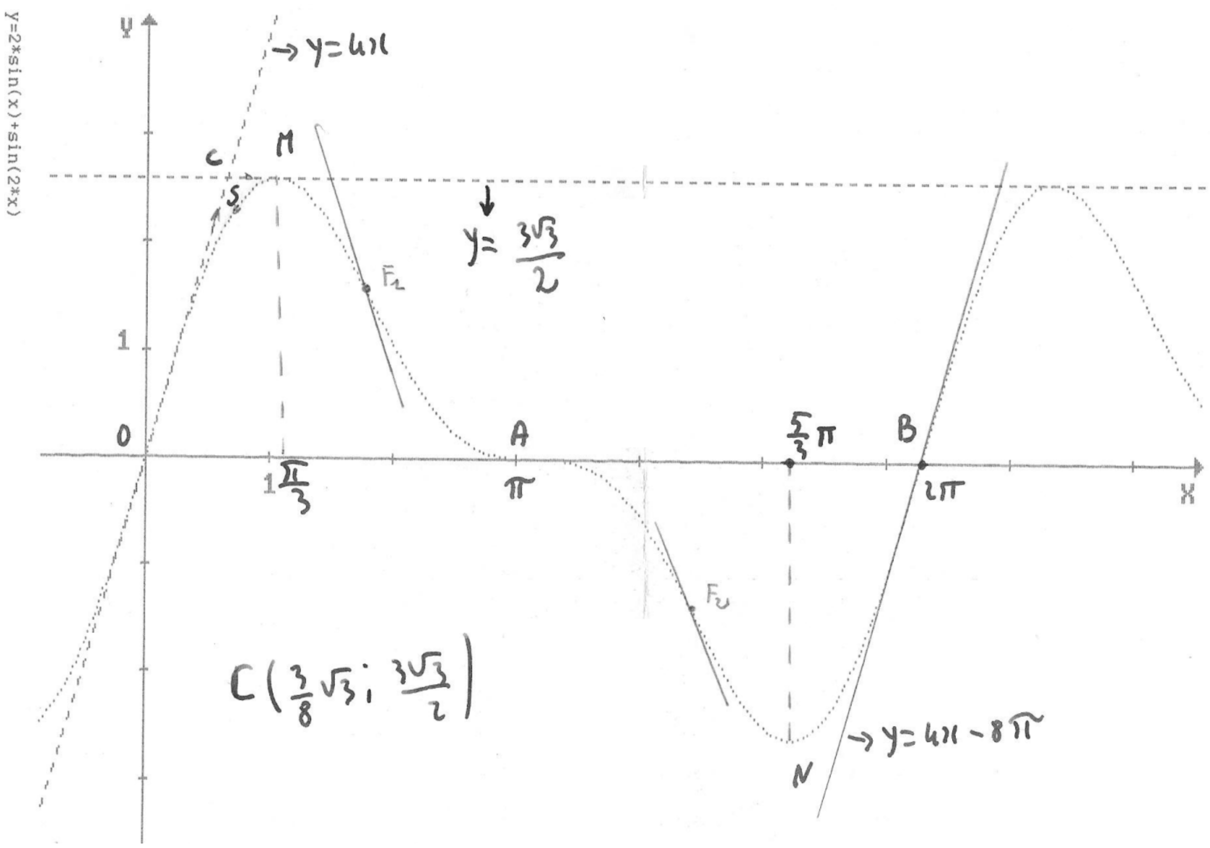
$4\sin a \cdot \cos(x - a) + 2\sin 2a \cos(2x - 2a) = 0$

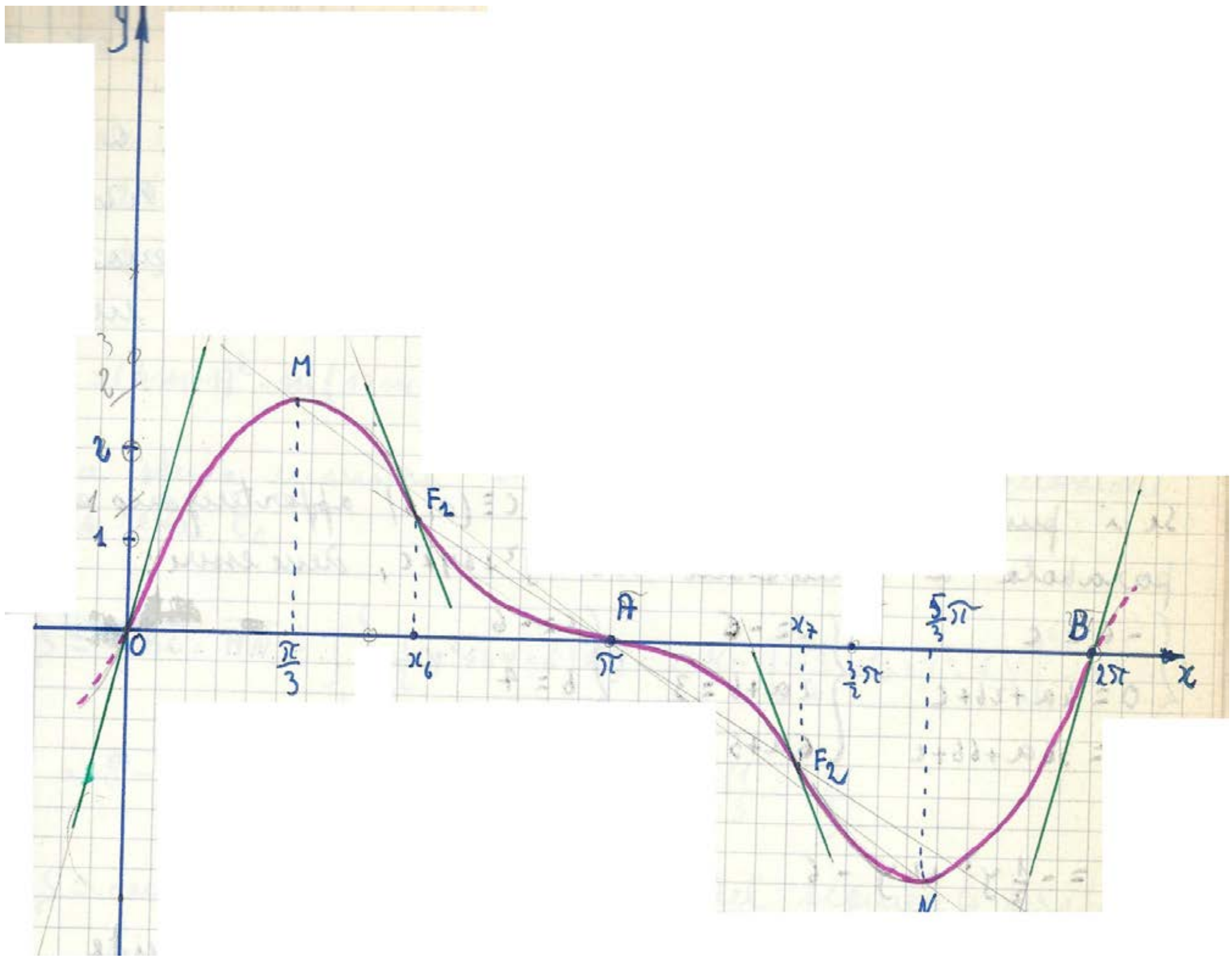
Questa uguaglianza è una identità se:

$\sin a = 0 \Rightarrow \quad a = 0 \quad a = \pi \;;\; a = 2\pi$

$\sin 2a = 0 \Rightarrow \quad a = 0 \quad a = \frac{\pi}{2} \;;\; a = \pi \;;\; a = \frac{3}{2}\pi \quad a = 2\pi$

Si può accettare solo la soluzione $x = \pi$ Il punto richiesto è: $\mathbf{C(\pi;0)}$


y=2*sin(x)+sin(2*x)
y
→ y= 4x
C
M
S
y= $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
F_1
1
0
A
$\frac{5}{3}\pi$
B
$\frac{\pi}{3}$
π
2π
x
F_2
C($\frac{3}{8}\sqrt{3}$; $\frac{3\sqrt{3}}{2}$)
→ y= 4x − 8π
N


y
M
F_1
2
1
O
$\frac{\pi}{3}$
x_6
A
π
x_7
$\frac{3}{2}\pi$
$\frac{5}{3}\pi$
B
2π
x
F_2
N

4. Considerata la generica parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$, si determinino i coefficienti a, b, c in modo che essa passi per i punti $a(-6;0)$, $b(0;2)$, $C(0;6)$; indi si calcoli l'area S della regione piana limitata dalla curva e dalle tangenti ad essa nei punti di ascissa nulla.

Se i punti $A \equiv (-6, 0)$, $B \equiv (0, 2)$, $C \equiv (0, 6)$ appartengano alla parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$, deve essere:

$$\begin{cases} -6 = c \\ 0 = 4a + 2b + c \\ 0 = 36a + 6b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -6 \\ 2a + b = 3 \\ 6a + b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -6 \\ b = 4 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + 4y - 6 \qquad (1) \qquad V \equiv \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$

Si tratta di una parabola ad asse ~~verticale~~ orizzontale avente il vertice nel punto $V \equiv (2, 4)$. Essa incontra l'asse x nel punto A e l'asse y nei punti B e C.

L'equazione della retta tangente ad una curva di equazione $y = f(x)$ ~~è il~~ in un suo punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ è:

$$y - y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} \cdot (x - x_0)$$

Se la curva ha equazione $x = g(y)$ allora abbiamo:

$$x - x_0 = \left(\frac{dx}{dy}\right)_{y = y_0} (y - y_0)$$

$$\frac{dx}{dy} = -y + 4 \; ; \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)_{y = y_B} = 2 \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)_{y = y_C} = -2$$

Pertanto le rette tangenti alla parabola nei punti B e C hanno equazioni rispettivamente:

$t_B)\ y=\frac{1}{2}x+2$; $t_C)\ y=-\frac{1}{2}x+6$

$N\equiv(4,4)$ è il punto comune alle rette t_B e t_C.

Altro modo:

$$\begin{cases} y-2=mx \\ x=-\frac{1}{2}y^2+4y-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{y-2}{m} \\ \frac{y-2}{m}=-\frac{1}{2}y^2+4y-6 \end{cases}$$

$$my^2-8my+2y+12m-4=0$$

$$my^2-2(4m-1)y+12m-4=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=(4m-1)^2-m(12m-4)^2=0 \qquad 4m^2-4m+1=0 \qquad (2m-1)^2=0 \quad m=\frac{1}{2}$$

Alla stessa maniera si procede per calcolare l'equazione della retta t_C.

$$S=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{HN}-\int_2^6\left(-\frac{1}{2}y^2+4y-6\right)dy=8-\left[-\frac{1}{6}y^3+2y^2-6y\right]_2^6=$$

$$=8-\left(-\cancel{36}+\cancel{72}-\cancel{36}+\frac{4}{3}-8+12\right)=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$$

S = area del triangolo BNC − area del segmento parabolico di base BC $=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{HN}}{2}-\frac{2}{3}\overline{BC}\cdot\overline{HV}=8-\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 4=\frac{8}{3}$