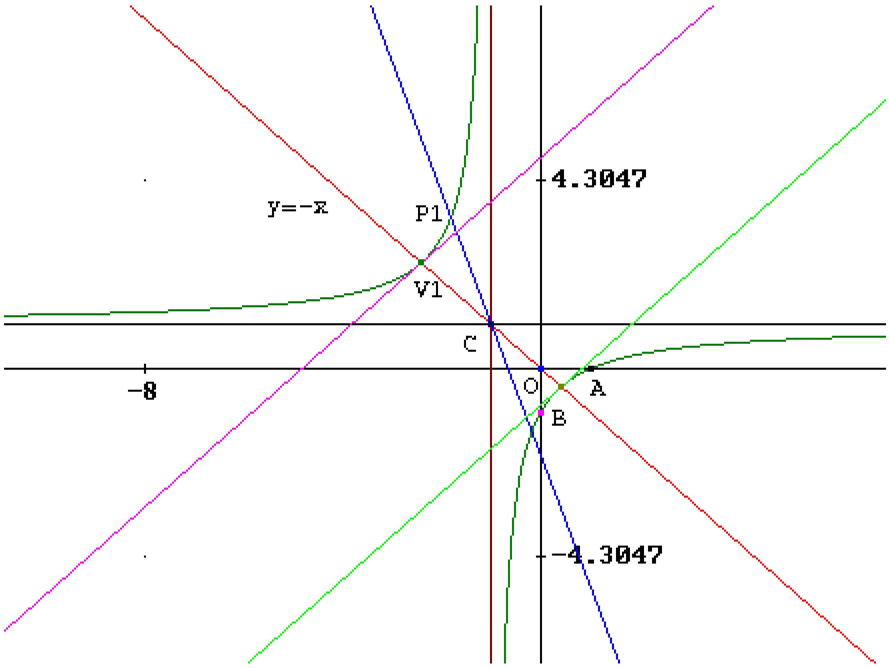
Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti.

In un piano riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, si rappresenti la curva di equazione $y = \frac{x-1}{x+1}$

Condotta poi per il punto $(-1,1)$ la retta di coefficiente angolare m, si dica per quali valori di m una delle sue intersezioni con la curva appartiene al primo o al quarto o al terzo quadrante.

Si determini inoltre la lunghezza della corda minima intercettata sulla retta dalla curva e si dica qual è il rapporto, maggiore di 1 ,fra le aree dei triangoli che le tangenti negli estremi di tale corda formano con gli assi coordinati.



$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

1) dom $y = R - \{-1\}$

2) $x=0 \Rightarrow y=-1$ $\quad B(0,-1)$

$y=0 \Rightarrow x-1=0 \quad x=1$ $\quad A(1,0)$

3) $y(x)>0$ per $x<-1;\ x>1$

$y(x)<0$ per $-1<x<1$

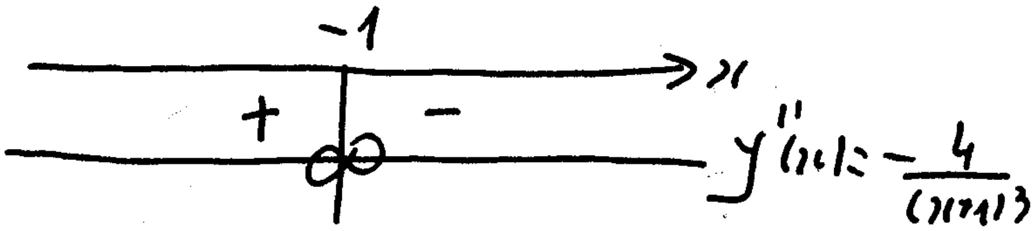
4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \Rightarrow y=1$ A. or. c.

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x-1}{x+1} = \infty \Rightarrow x=-1$ A. V. C.

5) $y'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in$ dom y

La funzione è strettamente crescente in tutto il suo dominio e quindi non presenta punti estremanti.

6) $y''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3}$



Il grafico della funzione non presenta punti di flesso e volge la concavità verso l'alto (il basso) per $x<-1$ ($x>-1$).

7) Si tratta di una iperbole equilatera avente gli asintoti paralleli agli assi cartesiani. $x=-1$, $y=1$ sono le equazioni di tali asintoti, mentre $C(-1, 1)$ è il suo centro.
I vertici V_1 e V_2 sono i punti comuni alla curva ed al suo asse trasverso la cui equazione è $y=-x$.
Pertanto le loro coordinate si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-1}{x+1} \\ y = -x \end{cases} \qquad \frac{x-1}{x+1} = -x \, ; \quad x-1 = -x^2 - x$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \qquad x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$V_1\left(-1-\sqrt{2} \, ; \, 1+\sqrt{2}\right) \qquad V_2\left(-1+\sqrt{2} \, ; \, 1-\sqrt{2}\right)$$

8) L'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti si ottiene effettuando la traslazione:

$$\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+1 \end{cases} \qquad Y+1 = \frac{X-1-1}{X-1+1} \, ; \quad Y+1 = \frac{X-2}{X}$$

$$XY + X = X - 2$$

$$\boxed{XY = -2}$$

9) L'equazione del fascio di rette di centro $C(-1,1)$ è:

$$y-1 = m(x+1) \qquad \boxed{y = mx + m + 1} \quad (3)$$

Per trovare le intersezioni della retta (3) con la curva (1) basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = mx + m + 1 \\ y = \dfrac{x-1}{x+1} \end{cases} \qquad \frac{x-1}{x+1} = mx + m + 1$$

$$x - 1 = mx^2 + mx + x + mx + m + 1$$

$$\boxed{mx^2 + 2mx + m + 2 = 0}$$

$$\frac{\Delta}{4} = m^2 - m^2 - 2m = -2m > 0 \text{ per } m < 0$$

Pertanto le intersezioni esistono solo se $m < 0$; $m_B = -2$; $m_A = -\frac{1}{2}$.

L'intersezione avente ascissa minore appartiene sempre al II quadrante.

L'intersezione avente ascissa maggiore appartiene:

al I quadrante per $-\frac{1}{2} < m < 0$

al IV quadrante per $-2 < m < -\frac{1}{2}$

al III quadrante per $m < -2$

10) $mx^2+2mx+m+2=0$

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - m(m+2)}}{m} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2-m^2-2m}}{m}$$

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{-2m}}{m} \qquad y = \pm\sqrt{-2m}+1$$

$$P_1\left(\frac{-m+\sqrt{-2m}}{m} ; 1+\sqrt{-2m}\right)$$

$$P_2\left(\frac{-m-\sqrt{-2m}}{m} ; 1-\sqrt{-2m}\right)$$

$$\overline{P_1P_2}^2 = g(m) = \left(-\frac{8}{m}\right)+(-8m) =$$

$$= -8\left(\frac{1}{m}+m\right) \qquad m<0$$

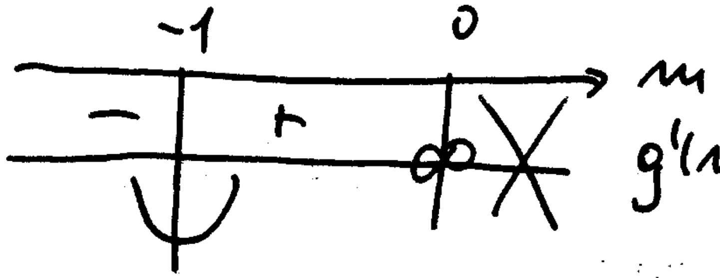
$$g'(m) = -8\left(-\frac{1}{m}+1\right) = \frac{8(1-m^2)}{m^2}$$

$$g'(m)=0 \Rightarrow 1-m^2=0 \qquad m=-1$$

$$\begin{cases} y_2 = mx_2 + m + 1 \\ y_1 = mx_1 + m + 1 \\ \hline y_2-y_1 = m(x_2-x_1) \quad \# \quad \# \end{cases} \qquad x_2-x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$\overline{P_1P_2} = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = (x_2-x_1)^2+m^2(x_2-x_1)^2 = \frac{\Delta}{a^2}+m^2\cdot\frac{\Delta}{a^2} =$$

$$= \frac{-2m}{m^2}+m^2\cdot\frac{-2m}{m^2} = \left(\frac{-2}{m}\right)+(-2m)$$



$$g'(m) = \frac{8(1-m^2)}{m^2}$$

$m = -1$ punto di minimo

La retta (3) diventa $y = -x$ ed i punti P_1 e P_2 sono i vertici dell'iperbole

$$\overline{P_1P_2} = \overline{V_1V_2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$

la lunghezza della corda minima intercettata sulla retta dalla curva (1) vale 4 e si ottiene per $m = -1$.

~~~

Metodo elementare

$$g(m) = \overline{P_1P_2}^2 = \left(-\frac{8}{m}\right) + (-8m) \qquad m<0$$

$$\left(-\frac{8}{m}\right)\cdot(-8m) = 64 \Rightarrow g_{min} \text{ per } -\frac{8}{m} = -8m$$

$$m^2 = 1 \qquad m = -1$$
~~~

Metodo indiretto

$gm = -8 - 8m^2$; $8m^2 + gm + 8 = 0$

$\Delta = g^2 - 256 \geq 0$ per $g \leq -16$; $g \geq 16$

$g_{min} = 16$ e si ottiene per

$$m = -\frac{b}{2a} = \frac{-g}{16} = -\frac{16}{16} = -1$$

L'iperbole equilatera è simmetrica rispetto al punto C origine del riferimento XCY. Quindi:

$P_1(X, Y)$ $P_2(-X, -Y)$ cioè $P_1\left(X; -\frac{2}{X}\right)$

$P_2\left(-X; \frac{2}{X}\right)$

$$P_1P_2 = \sqrt{(X+X)^2 + \left(-\frac{2}{X} - \frac{2}{X}\right)^2} = \sqrt{4X^2 + \frac{16}{X^2}} =$$

$= 2\sqrt{X^2 + \frac{4}{X^2}}$ P_1P_2 è una funzione positiva, quindi il suo eventuale minimo coincide col minimo della funzione:

$$f(x) = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{4} = x^2 + \frac{4}{x^2}$$

$$(x^2)\cdot\left(\frac{4}{x^2}\right) = 4 \Rightarrow f_{min} \text{ per } x^2 = \frac{4}{x^2}$$

$$x^4 = 4 \quad x^2 = 2 \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$\overline{P_1P_2} = 4 = \sqrt{4}\sqrt{2}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2(x^4-4)}{x^3} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 = 2 \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$f''(x) = 2\left(1 - \frac{12}{x^4}\right) \quad f''(\pm\sqrt{2}) = -10 < 0$$

Si tratta pertanto di punti di minimo.

u) $\Delta(x y t_1)$ [1] $\Delta(x y t_2) \Longrightarrow$

$$r = \frac{S_1}{S_2} = \frac{OV_1^2}{OV_2^2} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}-1)^2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2} = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^2 = \left[\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}\right]^2 =$$

$$= \left[2+1+2\sqrt{2}\right]^2 = \left[3+2\sqrt{2}\right]^2 =$$

$$= 9+8+12\sqrt{2} = 17+12\sqrt{2}$$

$$r = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{OV_1}^2}{\overline{OV_2}^2} = \frac{\overline{OR_1}^2}{\overline{OR_2}^2} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2} =$$

$$= 17+12\sqrt{2}$$

La distanza $\overline{P_1P_2}$ assume il valore minimo quando la retta P_1P_2 è $\perp$ alla tangente all'iperbole nel generico p.to $P(x, y)$

$P\left(x, \frac{x-1}{x+1}\right)$

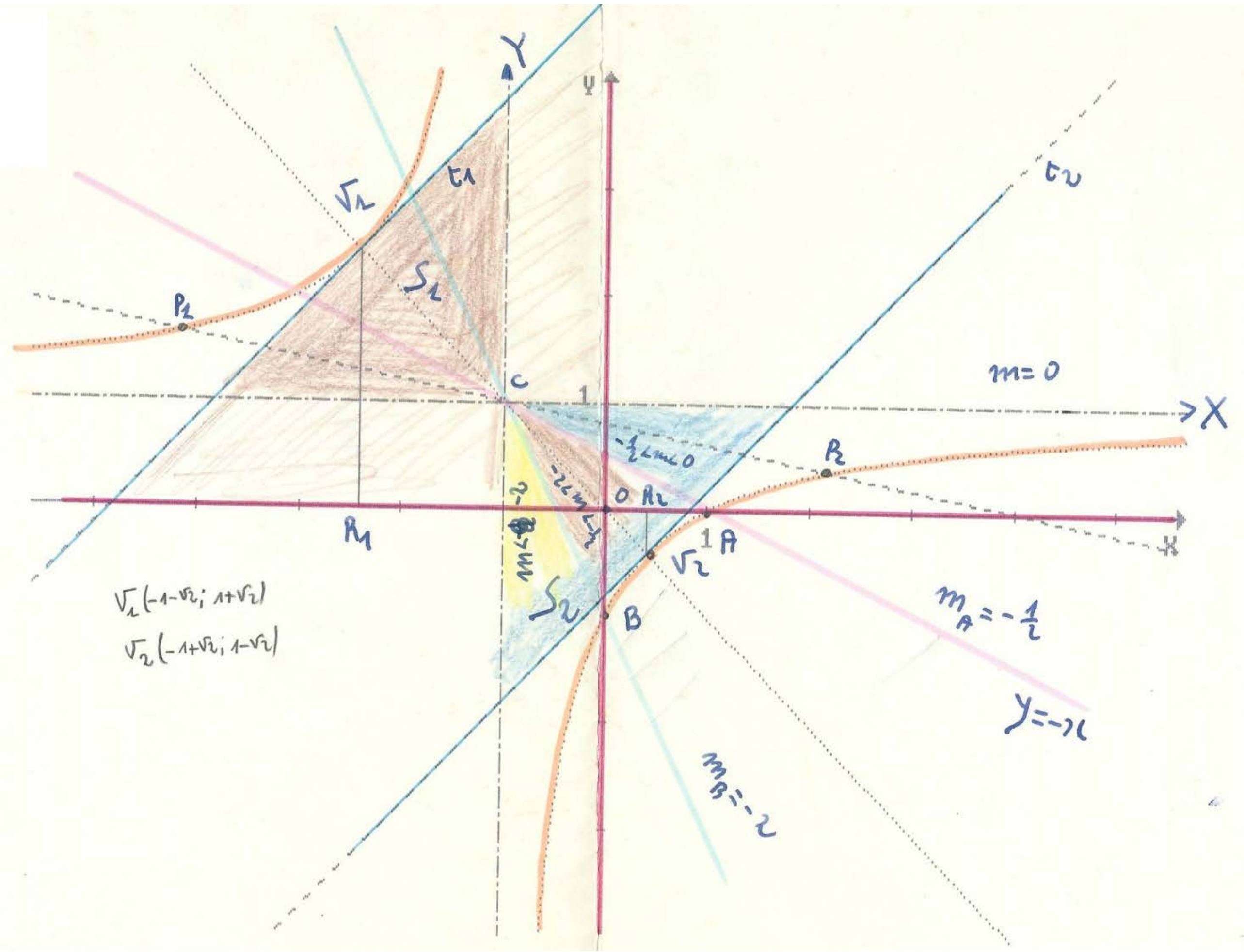
$m_t = y'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

$\frac{x-1}{x+1} = mx + m + 1 \Rightarrow m = -\frac{2}{(x+1)^2}$ coefficiente angolare della retta P_1P_2

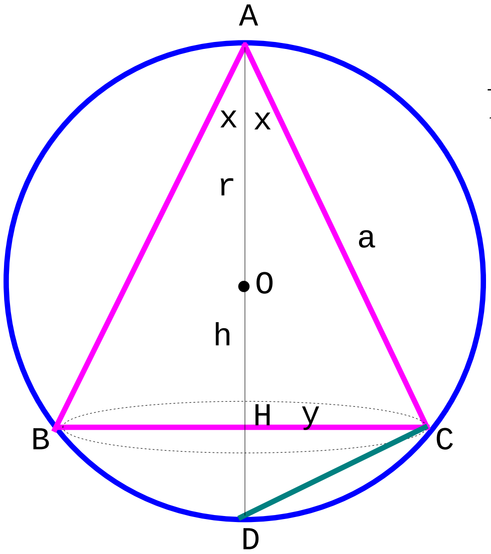
$m \cdot m_t = -1 \Rightarrow \frac{4}{(x+1)^4} = 1 \quad (x+1)^2 = 2$

$x = -1 \pm \sqrt{2}$ sono le ascisse dei p.ti P_1 e P_2

$P_1\left(-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right) \qquad P_2\left(-1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right)$



Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio r, determinare quello per il quale è massima l'area della superficie totale, dopo averne trovata l'espressione in funzione della semiapertura x di un generico cono.



$C\hat{A}H = x$ = semiapertura del cono

$\overline{AH} = h$ = altezza del cono

$\overline{AC} = a$ = apotema del cono

$\overline{AO} = r$ = raggio della sfera

$\overline{HC} = y$ = raggio del cono

$$S_t = \pi \cdot \overline{CH}^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \overline{CH} \cdot \overline{AC}$$

■ L'area S_t della superficie totale del cono , in funzione della sua semiapertura **x**, è determinabile mediante la seguente formula : $S_t = \pi \cdot \overline{CH}^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \overline{CH} \cdot \overline{AC}$

Pongo : $\overline{AH} = h$ = altezza del cono , $\overline{AC} = a$ = apotema del cono

$\overline{AO} = r$ = raggio della sfera , $\overline{HC} = y$ = raggio del cono , $C\hat{A}H = x$ = semiapertura del cono

$S_t = \pi y^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot ya = \pi y(a + y)$ = area della superficie totale del cono

$\overline{AC} = \overline{AD} \cdot \cos x \Rightarrow a = 2r\cos x$, $\overline{HC} = \overline{AC} \cdot \sin x \Rightarrow y = \sin x = 2r\sin x\cos x = r\sin 2x$

$$S_t = \pi r\sin 2x(2r\cos x + r\sin 2x) = \pi r^2\sin 2x(2\cos x + \sin 2x) = 4\pi r^2\sin x\cos^2 x(1 + \sin x) =$$

$$= 4\pi r^2(-\sin^4 x - \sin^3 x + \sin^2 x + \sin x)$$

Il massimo della funzione S_t coincide col massimo della funzione

$$f(x) = \frac{S_t}{4\pi r^2} = \sin x\cos^2 x(1 + \sin x) = -\sin^4 x - \sin^3 x + \sin^2 x + \sin x \quad \text{con } 0° < x < 90° .$$

$$f'(x) = \cos^3 x(1 + \sin x) - 2\sin^2 x\cos x(1 + \sin x) + \sin x\cos^3 x =$$

$$= \cos^3 x(1 + \sin x) - 2\sin^2 x\cos x(1 + \sin x) + \sin x\cos x\cos^2 x =$$

$$= \cos x(1 + \sin x)\left[\cos^2 x - 2\sin^2 x + \sin x(1 - \sin x)\right] =$$

$$= \cos x(1 + \sin x)\left[1 - \sin^2 x - 2\sin^2 x + \sin x - \sin^2 x\right]$$

$$\boxed{f'(x) = \cos x(1 + \sin x)(-4\sin^2 x + \sin x + 1)}$$

$$f'(x) = -4sin^3 x\cos x - 3sin^2 x\cos x + 2sin x\cos x + \cos x$$

$$\boxed{f'(x) = \cos x\left(-4sin^3 x - 3sin^2 x + 2sin x + 1\right)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x(1 + sin x)\left(-4sin^2 x + sin x + 1\right) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \ , \ sin x = -1$$

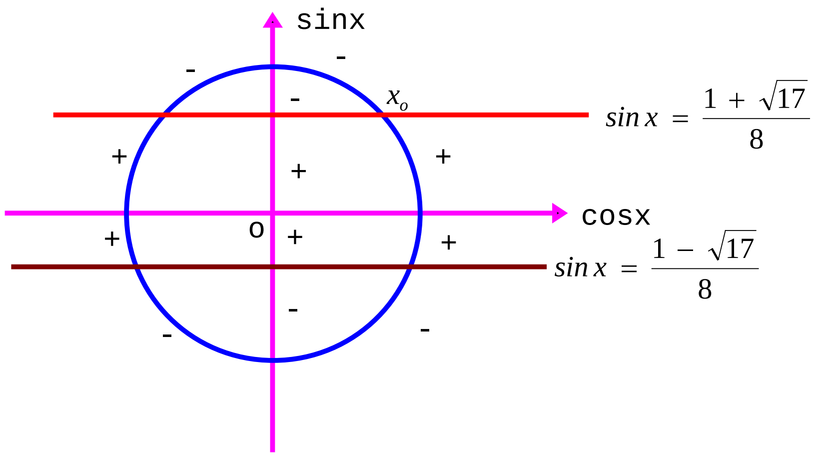
$$sin x = \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \cong -0{,}4 \ , \ sin x = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \cong 0{,}64$$

$x_o = arcsin\dfrac{1 + \sqrt{17}}{8}$ punto di massimo assoluto

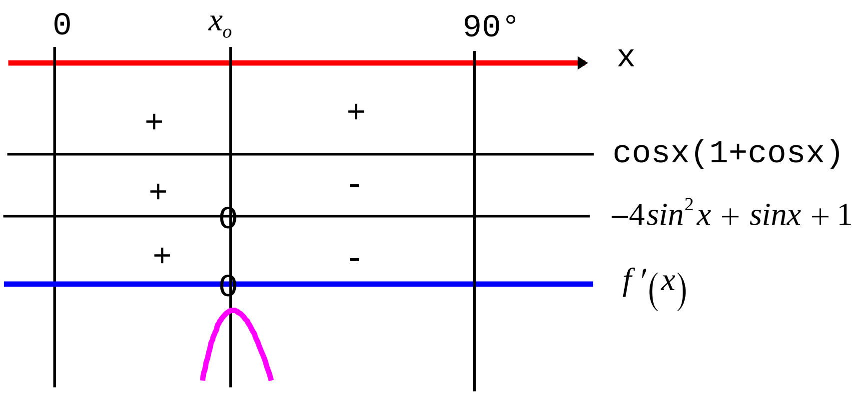
$$\cos^2 x_o = 1 - sin^2 x_o = 1 - \frac{1 + 17 + 2\sqrt{17}}{64} = \frac{46 - 2\sqrt{17}}{64} = \frac{23 - \sqrt{17}}{32}$$

$$S_t(x_o) = 4\pi r^2 \cdot \frac{23 - \sqrt{17}}{32} \cdot \frac{1 + \sqrt{17}}{8}\left(1 + \frac{1 + \sqrt{17}}{8}\right) = 4\pi r^2 \cdot \frac{23 - \sqrt{17}}{32} \cdot \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \cdot \frac{9 + \sqrt{17}}{8}$$

$$S_t(x_o) = = \frac{\pi r^2}{128}\left(107 + 51\sqrt{17}\right)$$



segno della funzione $-4sin^2 x + sinx + 1$



(A) Metodo delle costanti indeterminate

Se la somma di n numeri positivi è costante allora il loro prodotto è massimo quando i n numeri sono uguali.

$f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x(1+\sin x) = \sin x \cdot (1-\sin x)(1+\sin x)(1+\sin x)$

Moltiplico i primi 2 fattori per α e β; ottengo

$f(x) = \alpha \cdot \sin x \cdot (\beta - \beta \cdot \sin x)(1+\cos x)(1+\cos x)$

Suppongo che la somma dei 4 fattori sia costante, cioè indipendente da $\sin x$.

$\alpha \sin x + \beta - \beta \cdot \sin x + 2 + 2\sin x = (\alpha - \beta + 2)\sin x + \beta + 2$

Tale somma è costante se: $\boxed{\alpha - \beta + 2 = 0}$ equivale

$f(x)$ è massima se: $\alpha \cdot \sin x = \beta - \beta \cdot \sin x = 1 + \sin x$

$\alpha = \dfrac{1+\sin x}{\sin x}$; $\beta = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$; $\dfrac{1+\sin x}{\sin x} - \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} + 2 = 0$

$4\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ $\sin x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$

Pongo $\overline{CD} = x$; $a = \overline{AC} = \sqrt{4r^2 - x^2}$; $h \cdot 2r = a^2$

$h = \dfrac{4r^2 - x^2}{2r}$ $\overline{HD} \cdot 2r = x^2$ $\overline{HD} = \dfrac{x^2}{2r}$

$y^2 = h \cdot \overline{HD}$ $y^2 = \dfrac{x^2(4r^2 - x^2)}{4r^2}$

$S(x) = \pi\left[ay + y^2\right] = \pi\left[\sqrt{4r^2 - x^2} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2(4r^2 - x^2)}}{2r} + \dfrac{x^2(4r^2 - x^2)}{4r^2}\right]$

$S(x) = \left[\dfrac{x(4r^2 - x^2)}{2r} + \dfrac{x^2(4r^2 - x^2)}{4r^2}\right]\pi = \dfrac{\pi}{4r^2} x(2r + x)(4r^2 - x^2)$

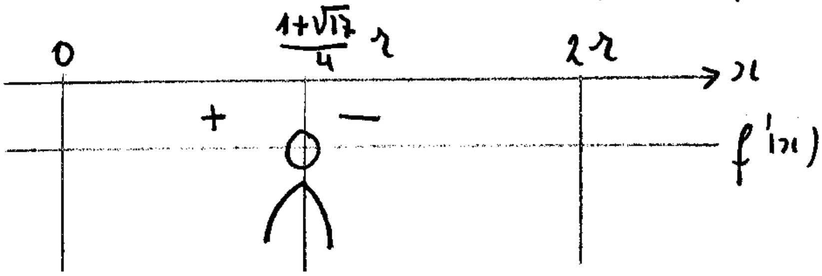
$f(x) = \dfrac{4r^2 S}{\pi} = x(2r - x)(2r + x)^2$

$f'(x) = (2r - x)(2r + x)^2 - x(2r + x)^2 + 2x(2r - x)(2r + x)$

$f(x) = (2r+x)(-4x^2+2rx+4r^2) \qquad 0 < x < 2r$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 2rx - 4r^2 = 0 \qquad x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}r$ valore non accettabile

$x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}r$ punto di massimo assoluto per la $f(x)$



$f''(x) = -4(3x^2+3rx-2\cdot$

$f''\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}r\right) < 0$

Metodo delle costanti indeterminate

Se la somma di 4 numeri positivi è costante allora il loro prodotto è massimo quando i 4 numeri sono uguali.

$$f(x) = x(2r-x)(2r+x)(2r+x)$$

Moltiplico i primi due fattori per α e β

$$f(x) = \alpha x \, (2\beta r - \beta x)(2r+x)(2r+x)$$

Impongo che la somma dei quattro fattori sia costante, cioè indipendente da x:

$$\alpha x + (2\beta r - \beta x) + (2r+x) + 2r+x = (\alpha-\beta+2)x + 4r + 2\beta r$$

Tale somma è costante se: $\alpha - \beta + 2 = 0$ (XX)

In questa ipotesi $f(x)$ è massima se:

$$\alpha x = \beta(2r-x) = 2r+x \qquad \text{cioè se: } \alpha = \frac{2r+x}{x} \quad \beta = \frac{2r+x}{2r-x}$$

Sostituendo nella (XX) otteniamo:

$$\frac{2r+x}{x} - \frac{2r+x}{2r-x} + 2 = 0 \qquad 2x^2 - rx - 2r^2 = 0 \qquad x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}r \ (N.A.)$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}r$$

$$S_{max} = S\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}r\right) = \frac{\pi r^2}{128}\left(51\sqrt{17} + 107\right)$$

$$h = \frac{23+\sqrt{17}}{16}r \qquad a = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{23+\sqrt{17}}{2}}$$

Si studi il grafico della funzione $y = \sin x + \sin 2x$ nell'intervallo $[0,2\pi]$

Calcolare l'area S della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione e dalle tangenti al grafico della funzione rispettivamente nei punti di ascissa $x=0$ e $x=\frac{\pi}{3}$. Dire se esiste un punto A dell'asse delle ascisse rispetto al quale il grafico della funzione è simmetrico.

1) dom $y = [0, 2\pi]$ 2) $x=0 \Rightarrow y=0$ $O(0,0)$

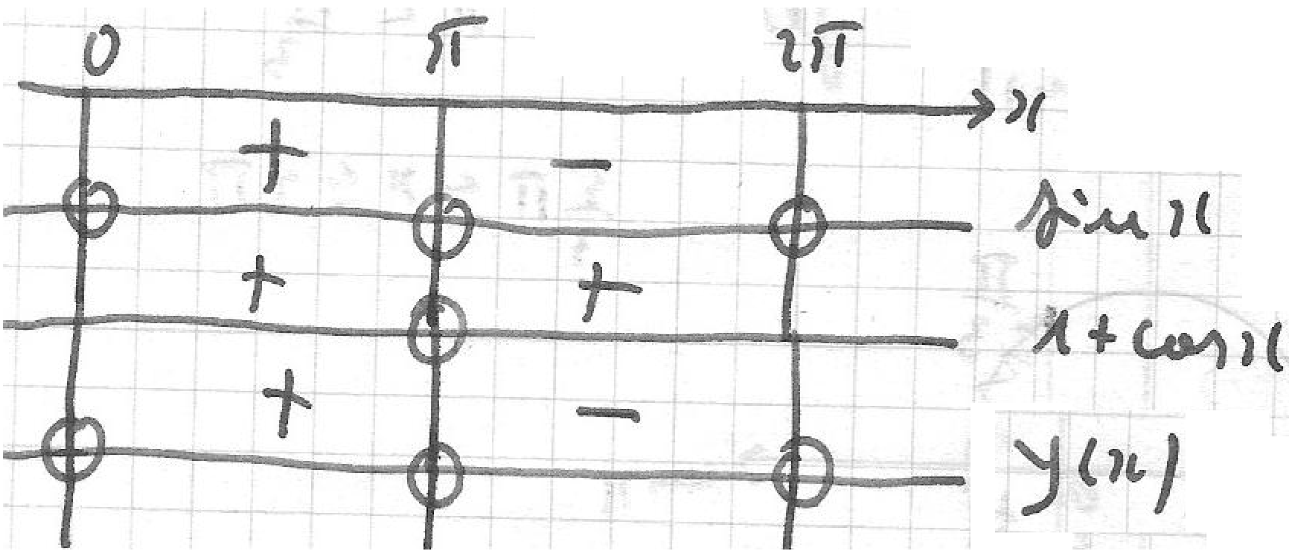
$y=0 \Rightarrow 2\sin x + \sin 2x = 0$ $2\sin x(1+\cos x)=0$

$\sin x = 0 \Rightarrow$ $x=0$ $x=\pi$ $x=2\pi$

$A(\pi,0)$ $B(2\pi,0)$; $\cos x = -1$ $x=\pi$

il $G(y)$ incontra gli assi cartesiani nei punti $O(0,0)$, $A(\pi,0)$, $B(2\pi,0)$

3) $y(x) = 2\sin x(1+\cos x)$



$y(x) > 0$ per $0 < x < \pi$

$y(x) < 0$ per $\pi < x < 2\pi$

4) $y'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x =$

$= 2(\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) =$

$= 2(\cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x)$

$y'(x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1) =$

$= 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

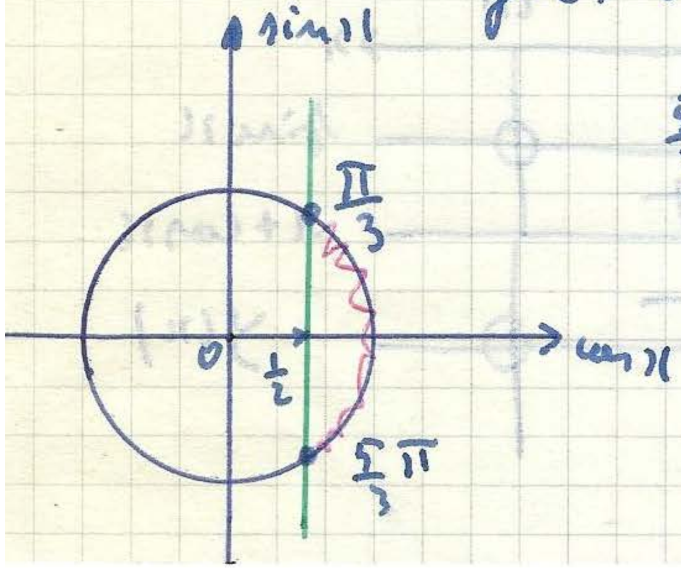
$y'(x) = 0 \Longrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

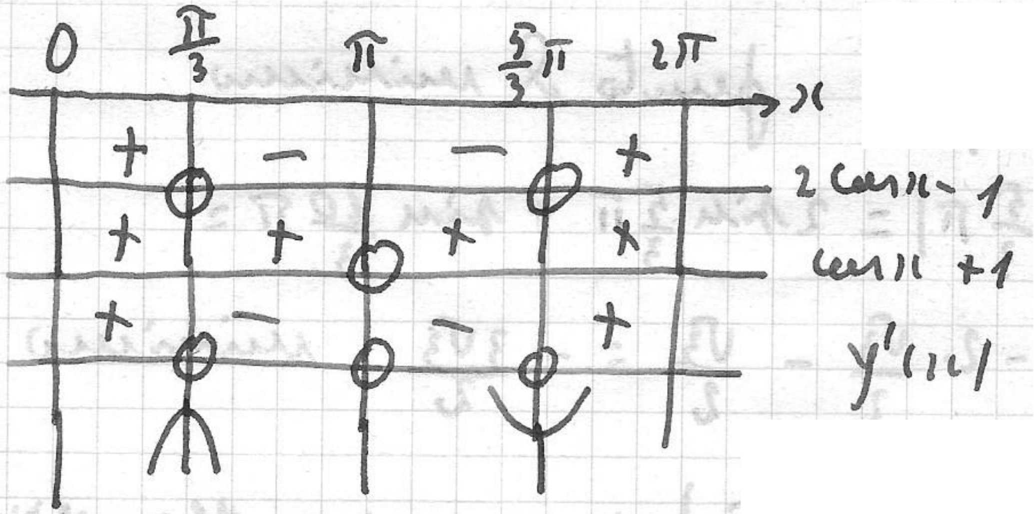
$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$y'(x) > 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 > 0 \Longrightarrow \cos x > +\frac{1}{2}$

per: $0 \le x < \frac{\pi}{3}$

$\frac{5}{3}\pi < x \le 2\pi$





La funzione è strettamente crescente (decrescente) per $0 < x < \frac{\pi}{3}$; $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$ $\left(\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi\right)$

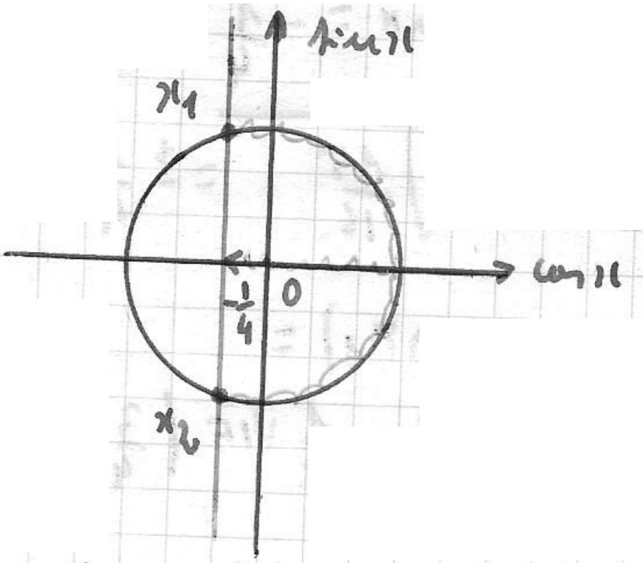
$x = \frac{\pi}{3}$ punto di massimo

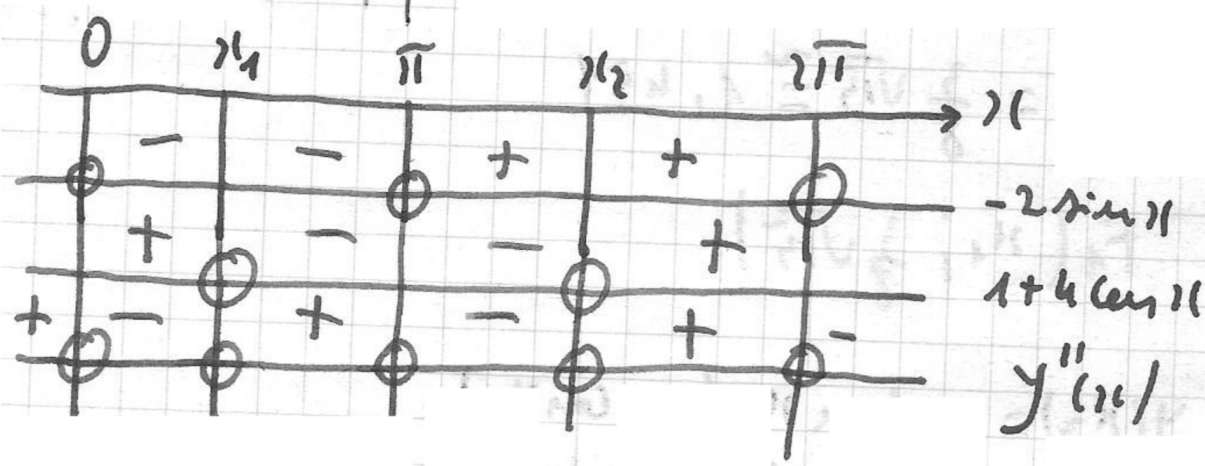
$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2}{3}\pi =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 2,6$$

massimo

$M\left(\frac{\pi}{3} ; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ immagine geometrica del massimo





$x = x_1$ $x = x_2$ sono due flessi ascendenti.

$x = 0$, $x = \pi$ $x = 2\pi$ sono tre flessi discendenti.

Il G(y) volge la concavità verso l'alto (il basso) per $x_1 < x < \pi$, $x_2 < x < 2\pi$ [$0 < x < x_1$, $\pi < x < x_2$]

$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ $\cos x = -\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\sin x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{16}} = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{15}$

$y(x_1) = 2\sin x_1 (1+\cos x_1) =$

$= \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}\sqrt{15}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{15}\left(\frac{3}{4}\right) =$

$= \frac{3}{8}\sqrt{15} \cong 1{,}451$

$F_1\left(x_1; \frac{3}{8}\sqrt{15}\right)$

$y(x_2) = 2\sin x_2(1+\cos x_2) =$

$= -2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{15}\left(1-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}\sqrt{15}$

$F_2\left(x_2; -\frac{3}{8}\sqrt{15}\right)$

il $G(y)$ presenta i seguenti flessi: O, A, B, F_1, F_2. Inoltre A è un punto di flesso a tangente orizzontale in quanto risulta $y'(\pi)=0$, con tangente di flesso coincidente con l'asse delle ascisse.

Essendo $y'(0) = y'(2\pi) = 2+2 = 4$

$y = 4x$ è la tangente inflessionale nell'origine, mentre

$y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ è la tangente in M

$y = 4x - 8\pi$ è la tangente inflessionale nel p.to B

$y'(x_1) = y'(x_2) = 2\left(\frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{9}{4}$

$y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{\pi}{3}\left(1 + 4\cos\frac{\pi}{3}\right) = -2\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + 4\cdot\frac{1}{2}\right) =$
$= -3\sqrt{3} < 0$

$y''\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -2\sin\frac{5}{3}\pi\left(1 + 4\cos\frac{5}{3}\pi\right) = -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 + 4\cdot\frac{1}{2}\right) =$
$= 3\sqrt{3} > 0$

Questi risultati confermano che la funzione presenta un massimo ed un minimo rispettivamente nei punti $x=\frac{\pi}{3}$ ed $x=\frac{5}{3}\pi$

$$S=\int_0^{\frac{3}{8}\sqrt{3}} 4x\,dx+\int_{\frac{3}{8}\sqrt{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sqrt{3}}{2}\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}(2\sin x+\sin 2x)\,dx=$$

$$=\left[2x^2\right]_0^{\frac{3}{8}\sqrt{3}}+\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{3}{8}\sqrt{3}}^{\frac{\pi}{3}}+$$

$$+\left[-2\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{0}=$$

$-1-\frac{1}{2}$

$$=2\cdot\frac{27}{64}+\frac{\pi\sqrt{3}}{2}-\frac{27}{16}-2-\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{27}{32}-\frac{27}{16}+\frac{\pi\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=$$

$$=-\frac{27}{32}+\frac{\pi\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{4}=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}-\frac{83}{32}$$

$f(x) = 2\sin x + \sin 2x \qquad C(a;0)$

$f(x) + f(2a - x) = 0 \quad (1)$

$G(f)$ è simmetrico rispetto al punto C se la (1) è identicamente verificata.

$2\sin x + \sin 2x +$

$2\sin(2a - x) + \sin(4a - 2x) = 0$

$2[\sin x + \sin(2a - x)] + \sin 2x + \sin(4a - 2x) = 0$

Applico le formule di prostaferesi.

$4\sin a\cos(x - a) + 2\sin(\ +2a) \cdot \cos(2x - 2a) = 0$

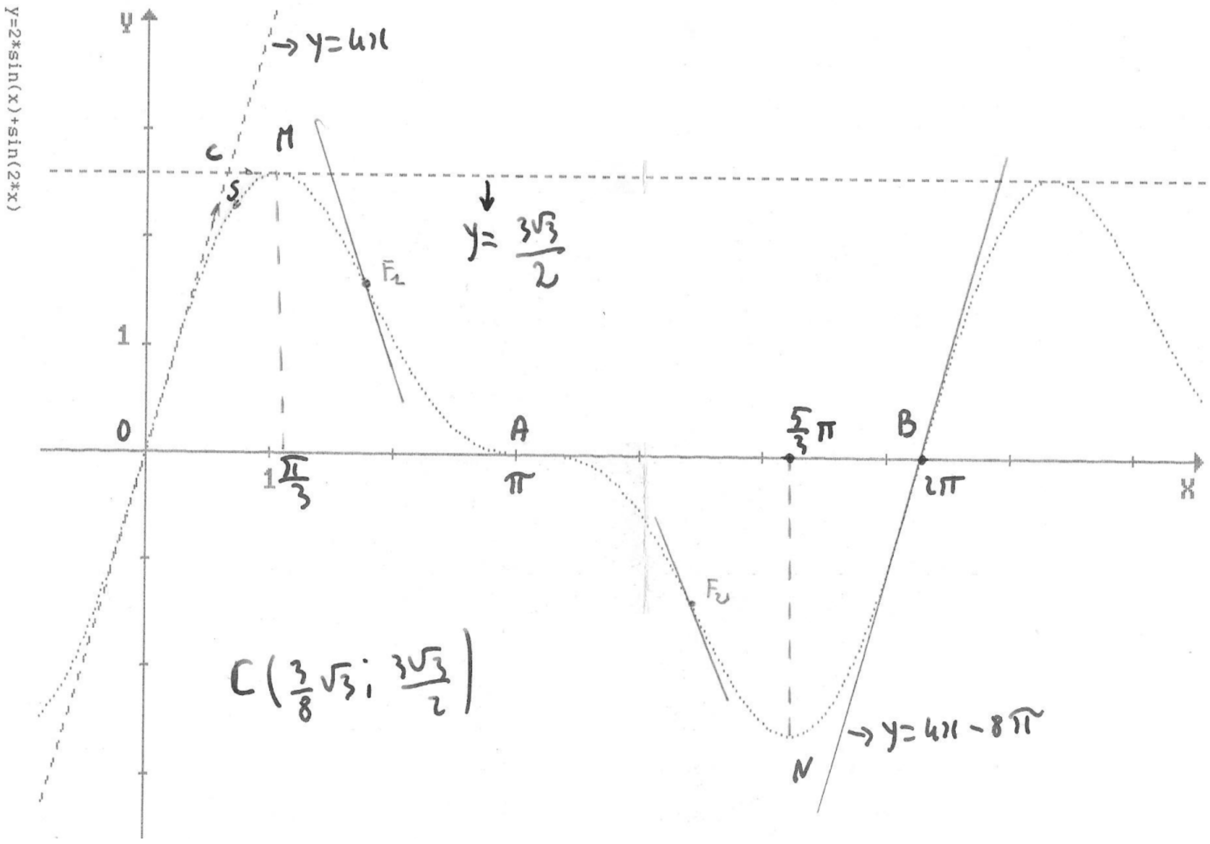
$4\sin a \cdot \cos(x - a) + 2\sin 2a\cos(2x - 2a) = 0$

Questa uguaglianza è una identità se:

$\sin a = 0 \Rightarrow a = 0 \quad a = \pi \;;\; a = 2\pi$

$\sin 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \quad a = \frac{\pi}{2} \;;\; a = \pi \;;\; a = \frac{3}{2}\pi \quad a = 2\pi$

Si può accettare solo la soluzione $x = \pi$ Il punto richiesto è: $\mathbf{C(\pi;0)}$


y=2*sin(x)+sin(2*x)
y = 4x
M
C
S
y = 3√3/2
F1
1
O
A
5/3 π
B
π/3
π
2π
x
y
F2
C (3/8 √3 ; 3√3/2)
y = 4x − 8π
N

4. Si esamini la posizione delle radici dell'equazione in x: $(m-1)x^2-(m+1)x+2m-1=0$ rispetto all'intervallo $(-1;1)$.

Metodo dell'isolamento del parametro

$mx^2 - x^2 - mx - x + 2m - 1 = 0 \quad ; \quad m = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+2}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+2} & (1) \\ y = m & (2) \\ -1 \le x \le +1 & (3) \end{cases}$$

La funzione (1) ha come dominio l'intervallo reale $(-\infty, +\infty)$. Essa è sempre positiva e presenta l'unico asintoto di equazione $y = 1$.

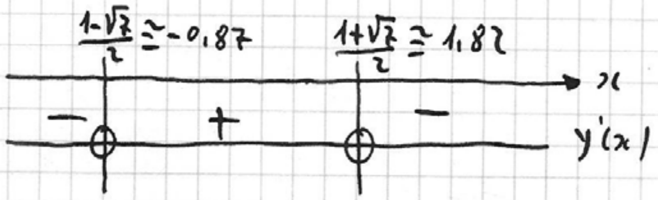
$$y'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-x+2)-(2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+2)^2} =$$

$$\frac{2x^3-2x^2+4x+x^2-x+2-2x^3-2x^2-2x+x^2+x+1}{(x^2-x+2)^2}$$

$$y'(x) = \frac{-2x^2+2x+3}{(x^2-x+2)^2} \quad (4)$$

$y'(x)=0 \Rightarrow 2x^2-2x-3=0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+6}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$



$x = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$ punto di minimo relativo $\quad y\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right) = \dfrac{7-2\sqrt{7}}{7} \cong 0,24$

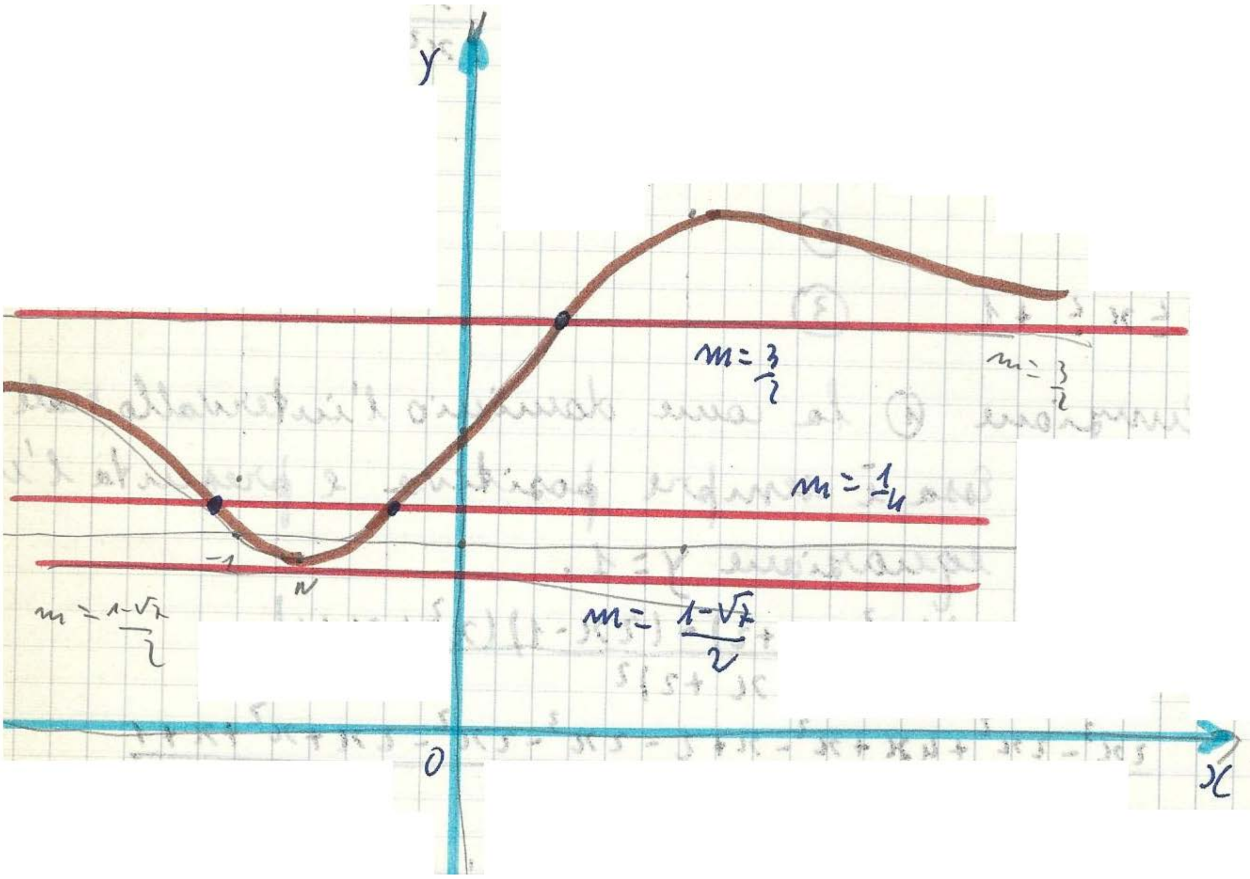
$x = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ punto di massimo relativo $\quad y\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right) = \dfrac{7+2\sqrt{7}}{7} \cong 1,75$

$N \equiv \left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2} ; \dfrac{7-2\sqrt{7}}{7}\right) \quad M \equiv \left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{2} ; \dfrac{7+2\sqrt{7}}{7}\right) \quad y(-1) = \dfrac{1}{4} = 0,25$

$-0,82 \quad 0,244 \quad \sim 1,75 \quad y(1) = \dfrac{3}{2} = 1,5$

$$y''(x) = \frac{2(2x-1)(x^2-x-5)}{(x^2-x+2)^2} \qquad y''(x)=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad x=\frac{1-\sqrt{21}}{2} \cong -1,8 \qquad x=\frac{1+\sqrt{21}}{2} \cong 2,8$$



$$\begin{cases} (m-1)x^2 - (m+1)x + (2m-1) = 0 \\ -1 \leq x \leq +1 \end{cases}$$

$\Delta = (m+1)^2 - 4(m-1)(2m-1) = -7m^2 + 14m - 3 \geq 0$ per $\frac{7-2\sqrt{7}}{7} \leq m \leq \frac{7+2\sqrt{7}}{7}$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ (m-1)y - (m+1)x + (2m-1) = 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$A \equiv (-1, 1)$ $\quad B \equiv (1, 1)$

fascio di rette di centro $C \equiv \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

$m = \frac{y+x+1}{y-x+2}$ $\qquad m_A = \frac{1}{4}$; $\quad m_B = \frac{3}{2}$

$y + x + 1 = 0 \Rightarrow m = 0$

$y - x + 2 = 0 \Rightarrow m = \infty$

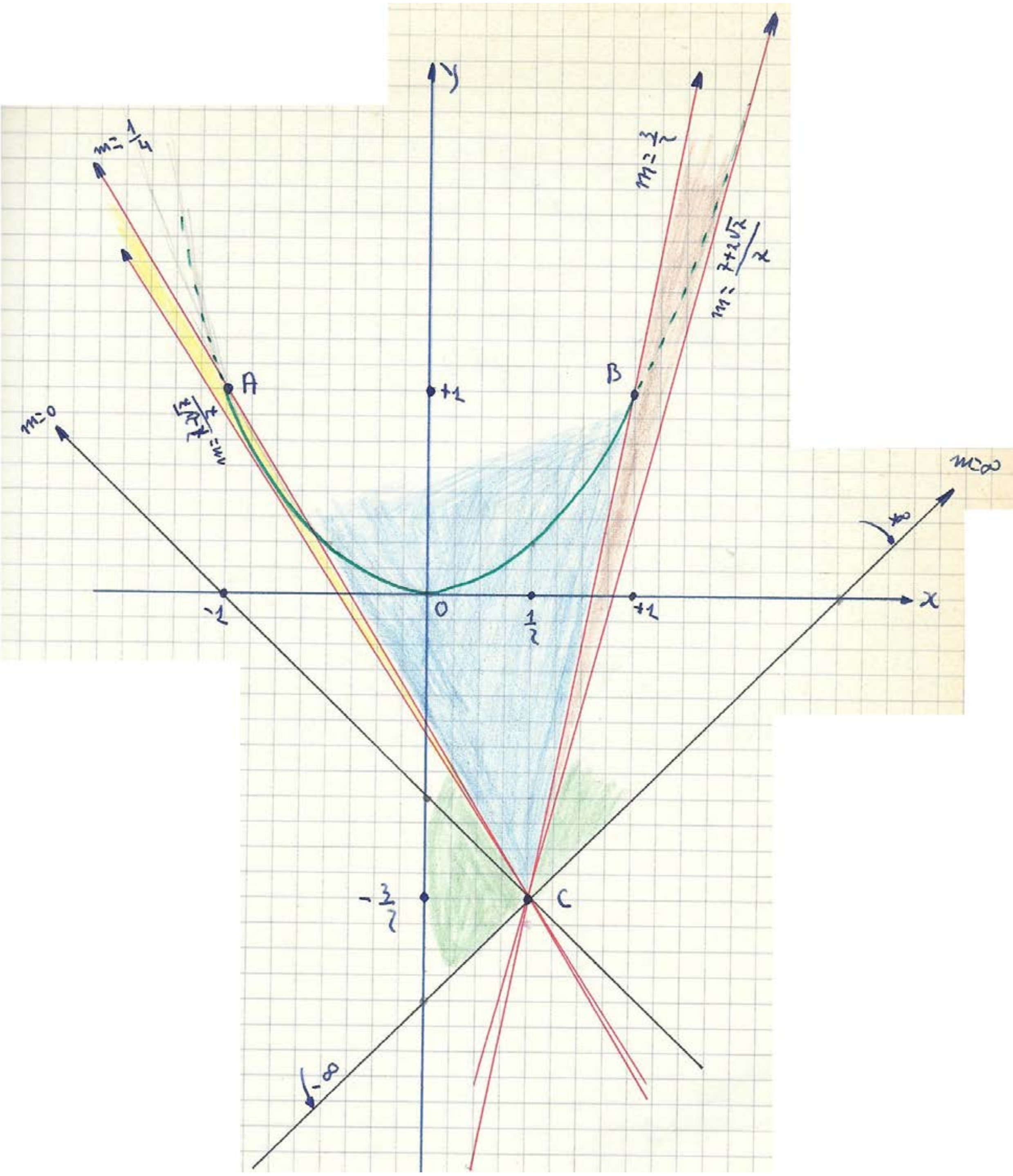
$m < \frac{7-2\sqrt{7}}{7}$: le radici dell'equazione data sono complesse e coniugate

$\frac{7-2\sqrt{7}}{7} \leq m \leq \frac{1}{4}$ $\quad \Delta > 0 \quad -1 \leq x_1 < x_2 < 1$

$\frac{1}{4} < m \leq \frac{3}{2}$ $\quad \Delta > 0$ una radice appartiene all'intervallo $[-1, 1]$

$\frac{3}{2} < m \leq \frac{7+2\sqrt{7}}{7}$: $\Delta > 0 \quad -1 < 1 < x_1 < x_2$

$m > \frac{7+2\sqrt{7}}{7}$: Le radici dell'equazione data sono complesse e coniugate


y
x
A
B
C
O
+1
-1
1/2
-3/2
m=0
m=∞
m=1/4
m=7/2
+∞
-∞