Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti.

1.

1. Si scriva l'equazione della circonferenza passante per i punti A$(-2,0)$, B$(4,0)$ ed avente il centro sulla retta $y=4$, e si calcolino le coordinate degli estremi del diametro parallelo all'asse delle x. Si determinino poi i coefficienti dell'equazione $y=ax^2+bx+c$ in modo che le parabole da essa rappresentate abbiano in comune il punto C$(0,4)$ e siano tangenti all'asse delle ascisse. Tra queste parabole si trovino quelle che passano per l'uno e per l'altro degli estremi del diametro suddetto. Si calcoli infine l'area della regione limitata dalle predette parabole e dall'asse delle x.

La circonferenza σ richiesta ha equazione del tipo

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad (x-\alpha)^2+(y-4)^2=r^2$$

con $\beta=4$, dovendo il suo centro appartenere alla retta di equazione $y=4$.

Ma: $A, B \in \sigma \Rightarrow \begin{cases}(-2-\alpha)^2+(0-4)^2=r^2\\(4-\alpha)^2+(0-4)^2=r^2\end{cases}$ cioè

$$\begin{cases}\alpha^2+4\alpha+20-r^2=0\\ \alpha^2-8\alpha+32-r^2=0\end{cases}$$
$$12\alpha-12=0$$

$\alpha=1$; $r^2=25$

$$\boxed{x^2+y^2-2x-8y-8=0} \quad (1)$$

Le coordinate degli estremi P e Q del diametro parallelo all'asse delle x si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}y=4\\x^2+y^2-2x-8y-8=0\end{cases} \qquad x^2-2x-24=0 \qquad P\equiv(-4,4)$$
$$x_1=-4\ ;\ x_2=6 \qquad Q\equiv(6,4)$$

Le coordinate del centro H della circonferenza si potevano calcolare tenendo presente che H è l'intersezione dell'asse del segmento AB $(x=1)$ con la retta $y=4$.
Poi si calcolava il raggio $r = \overline{HA} = HB$.
Se $C \equiv (0,4)$ appartiene alla parabola $y = ax^2 + bx + c$ deve essere: $c = 4$.
Le suddette parabole avranno il vertice sull'asse x, quindi:

$$y_V = \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \qquad 16a = b^2 \quad ; \quad a = \frac{b^2}{16}$$

$$y = \frac{b^2}{16}x^2 + bx + 4 \qquad (2)$$

Si tratta di un fascio di parabole. deve essere $b \neq 0$

Di esse quella che passa per P ha equazione

$$y = x^2 + 4x + 4 \qquad (3) \qquad V_1 \equiv (-2, 0) \equiv A$$

quella che passa per Q ha equazione

$$y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4. \qquad (4) \qquad V_2 \equiv (3, 0)$$

Infatti per la prima deve essere

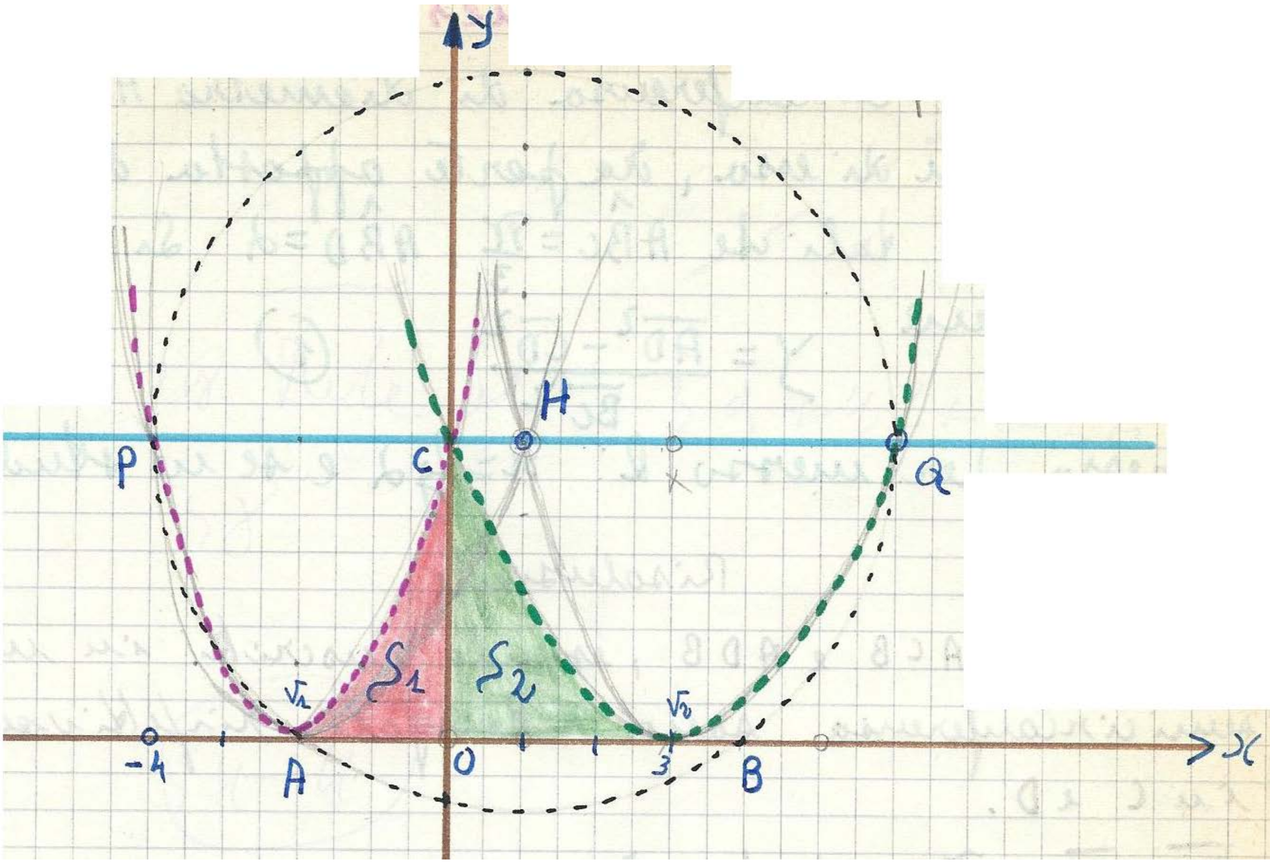
$4 = b^2 - 4b + 4 \quad ; \quad b(b-4) = 0 \qquad b = 0$ non si accetta in quanto il coefficiente del termine di secondo grado (a) deve essere diverso da zero ; $\quad b = 4$

per la seconda deve essere:

$$4 = \frac{b^2}{16} \cdot 36 + 6b + 4 \quad ; \quad \frac{9}{4}b^2 + 6b = 0 \qquad b \neq 0 \quad ; \quad b = -\frac{8}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} (x^2 + 4x + 4)\,dx + \int_0^3 \left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{4x^3}{27} - \frac{4}{3}x^2 + 4x\right]_0^3 = \frac{8}{3} - 8 + 8 + 4 - 12 + 12 = \frac{20}{3}$$



y
H
P
C
Q
S_1
S_2
$\sqrt{1}$
$\sqrt{2}$
-4
A
0
3
B
x

2. Data una circonferenza di diametro $|\overline{AB}| = 2r$, si prendano su di essa, da parte opposta di $\overline{AB}$, due punti C e D tali che $A\hat{B}C = \pi/3$, $B\hat{A}D = \alpha$. Si consideri la funzione:

$$y = \frac{|\overline{AD}|^2 - |\overline{CD}|^2}{|\overline{BC}|^2}$$

espressa per mezzo di $x = \tan\alpha$ e se ne studi il grafico.

I triangoli ACB e ADB, essendo inscritti in una semicirconferenza sono rettangoli rispettivamente in C e D.

$$\overline{BC} = \overline{AB} \cos\frac{\pi}{3} = 2r \cdot \frac{1}{2} = r$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} \sin\alpha = 2r \sin\alpha$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} \cos\alpha = 2r\cos\alpha$$

Applico il teorema di Carnot al triangolo BCD.

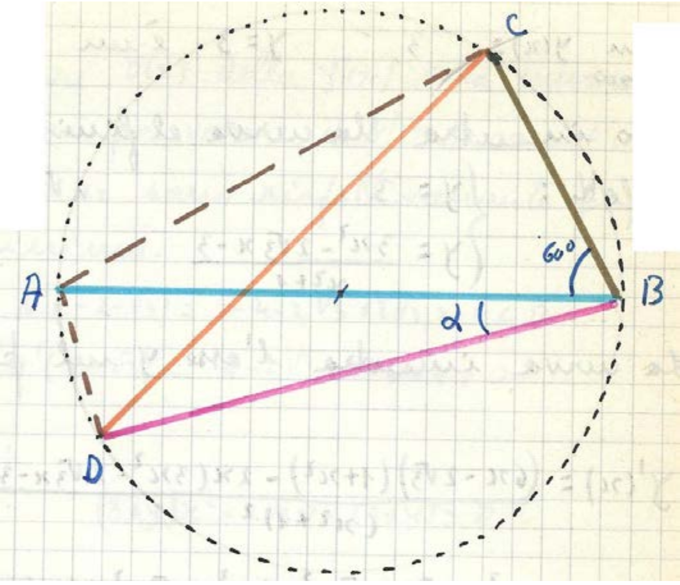
$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cos(60^\circ+\alpha) =$$
$$= r^2 + 4r^2\cos^2\alpha - 4r^2\cos\alpha\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) =$$
$$= r^2\left(1 + 4\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha\right) =$$
$$= r^2\left(2\cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha + 1\right)$$

$$y = \frac{4r^2\sin^2\alpha - r^2(3\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha)}{r^2}$$

$$y = 3\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha - 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha$$ con α angolo acuto, cioè $0 < \alpha < 90^\circ$

$$y = \frac{3\sin^2\alpha - 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$ sicuramente diverso da zero dovendo essere α un angolo acuto otteniamo:



$$y = \frac{3\,tg^2\alpha - 2\sqrt{3}\,tg\,\alpha - 3}{1 + tg^2\alpha} = \frac{3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3}{1 + x^2} \quad (2)$$

La funzione (2) poteva essere ottenuta esprimendo $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ in funzione di $tg\,\alpha$.
La natura del problema impone che sia $x > 0$ e quindi dovremmo studiare la funzione (2) nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Noi studieremo la funzione in tutto il suo dominio $(-\infty, +\infty)$ e tratteggeremo la parte di grafico relativo all'intervallo $(-\infty, 0)$.

Segno della funzione ed intersezioni con l'asse x.

$3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3 = 0 \qquad x = \dfrac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+9}}{3} = \dfrac{\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{3}$, $x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$

La curva incontra l'asse x nei punti $A \equiv \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $B \equiv (\sqrt{3}, 0)$

$y(x) > 0$ per $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x > \sqrt{3}$ $\qquad y(x) < 0$ per $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \sqrt{3}$

Asintoti

$\lim_{x\to\infty} y(x) = 3$ $\qquad$ $y=3$ è un asintoto orizzontale

Esso incontra la curva al finito nel punto $C \equiv (-\sqrt{3}, 3)$.

Infatti: $\begin{cases} y = 3 \\ y = \dfrac{3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3}{x^2+1} \end{cases}$ $\qquad 2\sqrt{3}x + 6 = 0 \qquad x = -\sqrt{3}$

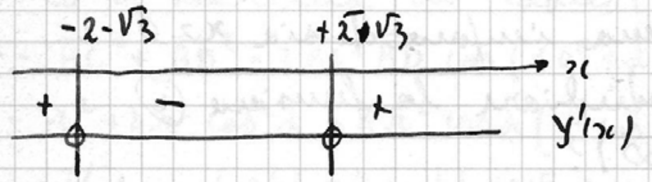
La curva incontra l'asse y nel punto $D \equiv (0, -3)$

$$y'(x) = \frac{(6x - 2\sqrt{3})(1+x^2) - 2x(3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{6x + 6x^3 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x^2 - 6x^3 + 4\sqrt{3}x^2 + 6x}{(x^2+1)^2} = \frac{2\sqrt{3}\,(x^2 + 2\sqrt{3}x - 1)}{(x^2+1)^2} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \qquad x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{3+1} = -\sqrt{3} \pm 2$$

$x_1 = -2-\sqrt{3}$; $\quad x_2 = -2+\sqrt{3}$



La funzione, essendo crescente negli intervalli $(-\infty, -2-\sqrt{3})$, $(-2+\sqrt{3}, +\infty)$ e decrescente nell'intervallo $(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$ presenta un massimo (assoluto) nel punto $x = -2-\sqrt{3}$ ed un minimo (assoluto) nel punto $x = -2+\sqrt{3}$.

$$y(-2-\sqrt{3}) = \frac{3(-2-\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}(-2-\sqrt{3}) - 3}{(-2-\sqrt{3})^2+1} = \frac{3(4+3+4\sqrt{3}) + 4\sqrt{3} + 6 - 3}{4+3+4\sqrt{3}+1} =$$

$$= \frac{2(3+2\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \qquad M \equiv (-2-\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$$

$$y(+2-\sqrt{3}) = \frac{2(3-2\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}} = -2\sqrt{3} \qquad N \equiv (2-\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$$

Osservazione

Essendo il denominatore $D(x)$ della $y'(x)$ una funzione sempre positiva basterà far vedere che $N'(x_1)<0$ ed $N'(x_2)>0$ per affermare che x_1 ed x_2 sono rispettivamente punti di massimo e di minimo.

$N'(x) = 2x + 2\sqrt{3}$; $N'(-2-\sqrt{3}) = -4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3} = -4 < 0$

$N'(2-\sqrt{3}) = 4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3} = 4 > 0$

Campo di variabilità:

$yx^2 + y = 3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3$ $\qquad (3-y)x^2 - 2\sqrt{3}x - (3+y) = 0$

$\frac{\Delta}{4} = \quad 3 + (3+y)(3-y) = 0 \qquad 3+9-y^2=0 \qquad y^2 = 12$; $y = \pm 2\sqrt{3}$

$\frac{\Delta}{4} \geq 0$ per $-2\sqrt{3} < y < 2\sqrt{3}$

$y = -2\sqrt{3} \Longrightarrow \quad x = 2-\sqrt{3}$; $y = 2\sqrt{3}$; $x = -2-\sqrt{3}$

Abbiamo ottenuto gli stessi risultati di prima

$$y''(x) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{(2x+2\sqrt{3})(x^2+1)^{\cancel{2}} - 2(x^2+1)(2x)(x^2+2\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

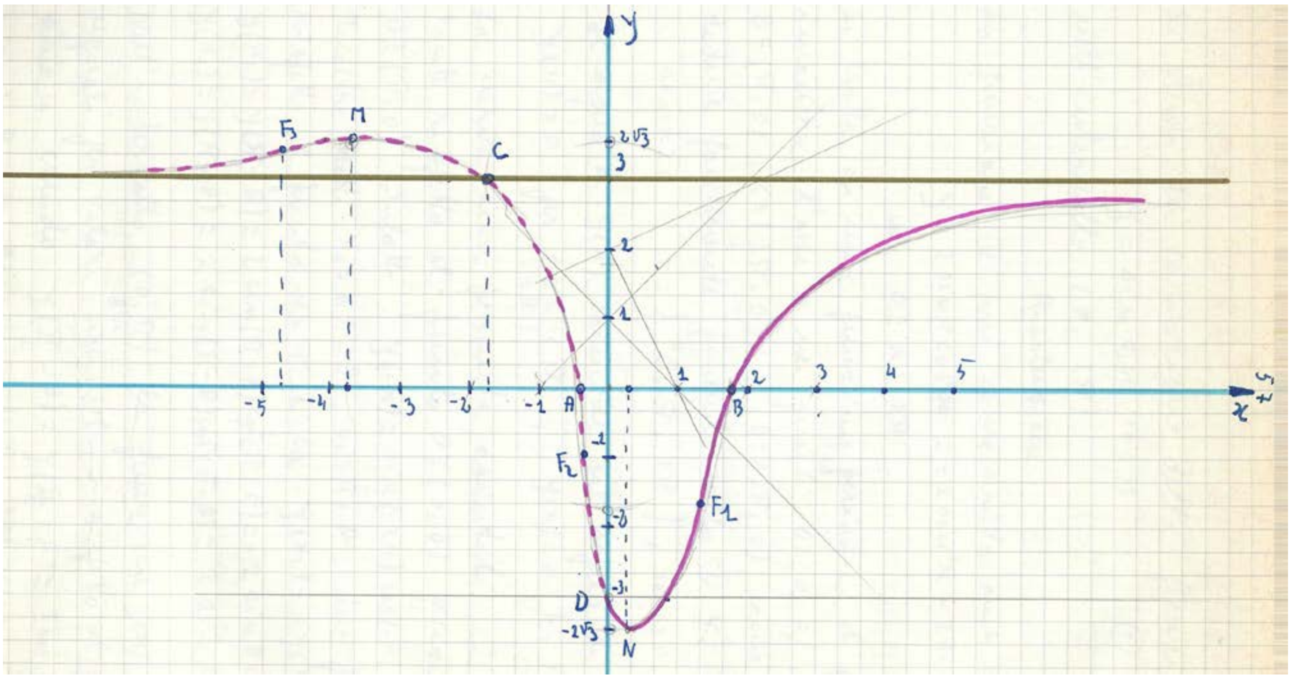
$$y''(x) = \frac{4\sqrt{3}(-x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 3x + \sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

$y''(x) = 0 \Longrightarrow x^3 + 3\sqrt{3}x^2 - 3x - \sqrt{3} = 0$ equazione di terzo grado avente tre radici reali espressi da numeri irrazionali.

$x_1 = -5,6$; $x_2 = -0,4$; $x_3 = 0,839$.

$y(x_1) = 3,41$; $y(x_2) = -1,18$; $y(x_3) = -2,23$

Infatti: $y(-6)\cdot y(-5) < 0 \qquad y(-1)\cdot y(0) < 0 \qquad y(0)\,y(1) < 0$



3. Si studi la variazione della funzione $y = \sin 2x \cos x$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.

La funzione ① può essere scritta anche nella forma:

$y = 2\sin x \cos^2 x = -2\sin^3 x + 2\sin x$ con $0 \leq x \leq 2\pi$ ②

Si tratta di una funzione periodica di periodo 2π che incontra l'asse x nei punti $O \equiv (0, 0)$, $A \equiv (\frac{\pi}{2}, 0)$, $B \equiv (\pi, 0)$, $C \equiv (\frac{3}{2}\pi, 0)$, $D \equiv (2\pi, 0)$ come si deduce facilmente ponendo nella ② $y = 0$ e ricavando:

$\sin x = 0 \quad x = \{0; \pi; 2\pi\}$; $\cos x = 0 \quad x = \{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\}$.

Il segno di $y(x)$ coincide col segno di $\sin x$, per cui:

$y(x) > 0$ per $0 < x < \pi$ $(x \neq \frac{\pi}{2})$; $y(x) < 0$ per $\pi < x < 2\pi$ $(x \neq \frac{3}{2}\pi)$

La curva non presenta asintoti ed è simmetrica tanto rispetto al punto $O \equiv (0, 0)$ quanto al punto $B \equiv (\pi, 0)$. Infatti $y(-x) = \sin(-2x)\cos(-x) = -\sin 2x \cos x = -y(x)$

Inoltre detti $x_1 = \pi - \theta$, $x_2 = \pi + \theta$ due punti simmetrici rispetto al punto $x = \pi$ si ha $y(x_2) = -y(x_1)$

$y(x_2) = y(\pi + \theta) = 2 \sin(\pi + \theta) \cos^2(\pi + \theta) = -2 \sin\theta \cos^2\theta$

$y(x_1) = y(\pi - \theta) = 2 \sin(\pi - \theta) \cos^2(\pi - \theta) = 2 \sin\theta \cos^2\theta$

Nell'intervallo $(0, \pi)$ la funzione $y(x)$ assume valori uguali per valori di x simmetrici rispetto al punto $x = \frac{\pi}{2}$ ~~come~~ essendo $y(\frac{\pi}{2} - \beta) = y(\frac{\pi}{2} + \beta) = 2 \cos\beta \sin^2\beta$ e quindi, per la simmetria della $y(x)$ rispetto al punto $x = \pi$, la $y(x)$ assume valori uguali per valori di x

simmetrici rispetto al punto $x = \frac{3}{2}\pi$.

Quindi la curva di equazione 1 è, nell'intervallo $(0, \pi)$, simmetrica rispetto alla retta $x = \frac{\pi}{2}$ e, nell'intervallo $(\pi, 2\pi)$, rispetto alla retta $x = \frac{3}{2}\pi$.

Pertanto la funzione può essere studiata nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$ e poi riprodotta per simmetria.

$y'(x) = -6 \sin^2 x \cos x + 2 \cos x = 2 \cos x (1 - 3 \sin^2 x)$

oppure

$y'(x) = 2 \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \sin x =$

$= 2(2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$

$= 4 \cos^3 x - 2 \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = 4 \cos^3 x - 2 \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x =$

$= 4 \cos^3 x - 2 \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 6 \cos^3 x - 4 \cos x = 6 \cos x (\cos^2 x - \frac{2}{3})$

$y'(x) = 0 \Longrightarrow \cos x (1 - 3 \sin^2 x) = 0 \qquad \cos x = 0 \qquad x = \begin{cases} 90° = \frac{\pi}{2} \\ 270° = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$

$1 - 3 \sin^2 x = 0 \qquad \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ $x = 35°14'47'' = 0{,}615^R = \vartheta_0$

$x = \pi - \vartheta_0$ $\qquad \frac{\pi}{6} < \vartheta_0 < \frac{\pi}{4}$ inquanto (*)

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ $x = \pi + \vartheta_0 ,\quad x = 2\pi - \vartheta_0$

(*) $\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5 < \sin\vartheta_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577 < \sin\frac{\pi}{4} = 0{,}707$

$$y(\vartheta_0) = \left[2\sin x(1 - \sin^2 x)\right]_{x=\vartheta_0} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \cong 0{,}7698$$

Riepilogando i valori che annullano la $y'(x)$ sono:

$x_1 = \vartheta_0 ;\ x_2 = \frac{\pi}{2} ;\ x_3 = \pi - \vartheta_0 ,\ x_4 = \pi + \vartheta_0 ;\ x_5 = \frac{3}{2}\pi ;\ x_6 = 2\pi - \vartheta_0$

x	0 – ϑ_0	ϑ_0 – $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ – $\pi-\vartheta_0$	$\pi-\vartheta_0$ – $\pi+\vartheta_0$	$\pi+\vartheta_0$ – $\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$ – $2\pi-\vartheta_0$	$2\pi-\vartheta_0$ – 2π
$\cos x$	+	+	−	−	−	+	+
$1-3\sin^2 x$	+	−	−	+	−	−	+
$y'(x)$	+	−	+	−	+	−	+

Pertanto la funzione $y(x)$ è massima nei punti ϑ_0, $\pi - \vartheta_0$, $\frac{3}{2}\pi$, minima nei punti $\frac{\pi}{2}$, $\pi + \vartheta_0$, $2\pi - \vartheta_0$.

$y(\vartheta_0) = y(\pi - \vartheta_0) = \frac{4\sqrt{3}}{9} ,\quad y(\pi + \vartheta_0) = y(2\pi - \vartheta_0) = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$

$$y''(x) = -2\sin x - 6\left[2\sin x\cos x\cos x + \sin^2 x(-\sin x)\right] =$$

$$= 18\sin^3 x - 14\sin x = 2\sin x(9\sin^2 x - 7) = -18\sin x\left(\cos^2 x - \frac{2}{9}\right)$$

$y''(x)=0 \Rightarrow \quad x=\left\{0,\pi,2\pi\right\}$ da $\sin x=0$

$9\sin^2 x-7=0$ app. $\cos^2 x=\frac{2}{9} \Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}=\pm 0{,}4714$

$x=\beta_0=61^\circ 52',5=1{,}080^R$

Riepilogando i valori che annullano $y''(x)$ sono:

$x_0=0$, $x_7=\beta_0$; $x_8=\pi-\beta_0$; $x_9=\pi$, $x_{10}=\pi+\beta_0$; $x_{11}=2\pi-\beta_0$; $x_{12}=2\pi$

$y(\beta_0)=2\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\left(1-\frac{7}{9}\right)=\frac{4\sqrt{7}}{27}\cong 0{,}39$

$y(\beta_0)=y(\pi-\beta_0)=\frac{4\sqrt{7}}{27}$; $y(\pi+\beta_0)=y(2\pi-\beta_0)=-\frac{4\sqrt{7}}{27}$

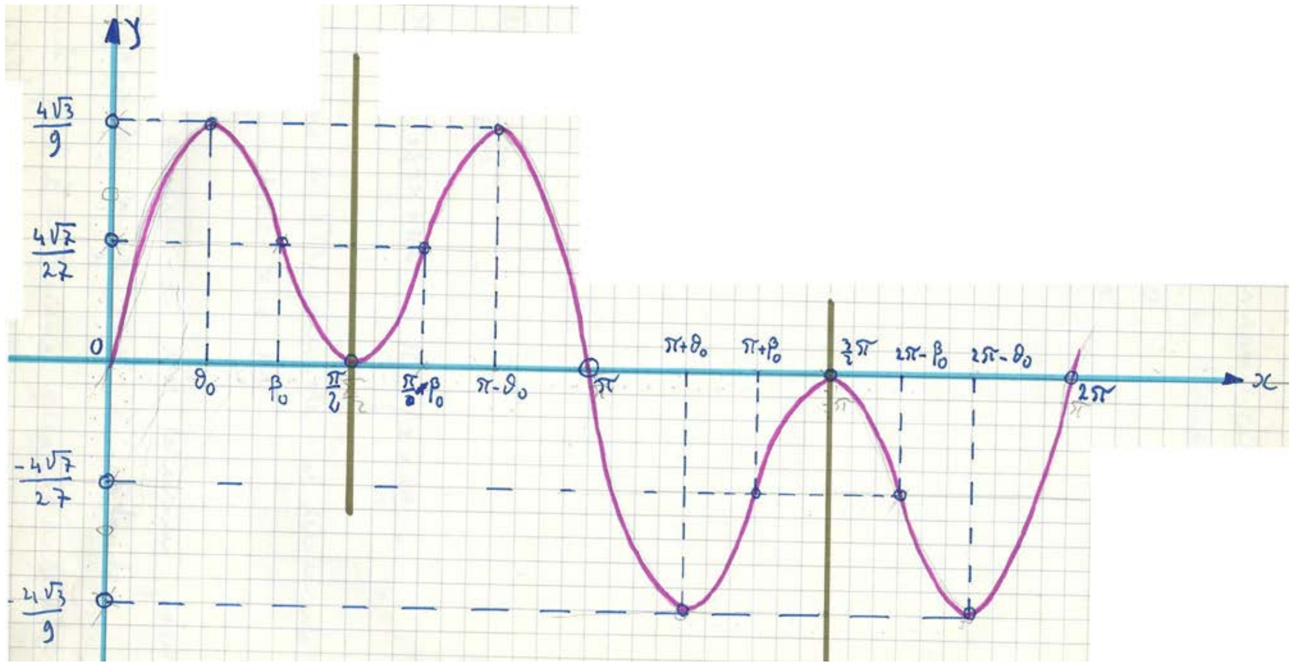
$y(0)=y(\pi)=y(2\pi)=0$

x	0		β_0		$\pi-\beta_0$		π		$\pi+\beta_0$		$2\pi-\beta_0$		2π
$\sin x$	0	+		+		+	0	−		−		−	0
$9\sin^2 x-7$		−	0	+	0	−		+	0	+	0	−	
$y''(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0

La curva presenta dei flessi nei punti 0, β_0, $\pi-\beta_0$, π, $\pi+\beta_0$, $2\pi-\beta_0$, 2π $\quad y'(0)=2 \quad y'(\beta_0)=-\frac{8\sqrt{2}}{9}\cong -1{,}257$

Tabella riassuntiva

x	0		ϑ_0		β_0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\beta_0$		$\pi-\vartheta_0$		π		$\pi+\vartheta_0$		$\pi+\beta_0$		$\frac{3}{2}\pi$		$2\pi-\beta_0$		$2\pi-\vartheta_0$		2π
$y(x)$	0	+		+		+	0	+		+		+	0	−		−		−	0	−		−		−	0
$y'(x)$		+	0	−		−	0	+		+	0	−		−	0	+		+	0	−		−	0	+	
$y''(x)$	0	−		−	0	+		+	0	−		−	0	+		+	0	−		−	0	+		+	0


y
x
0
4√3/9
4√7/27
-4√7/27
-4√3/9
θ₀
β₀
π/2
π/2+β₀
π-θ₀
π
π+θ₀
π+β₀
3/2π
2π-β₀
2π-θ₀
2π

4. Si determinino l'altezza ed il raggio di base del volume minimo circoscritto ad una data sfera di raggio r. Si dimostri poi che il suddetto cono è anche quello di minima superficie totale.

Si determinino l'altezza ed il raggio di base del cono di volume minimo circoscritto ad una data sfera di raggio r. Si dimostri poi che il suddetto cono è anche quello di minima superficie totale.

Prima metodo

Risolviamo il problema ricordando che la somma di due numeri positivi x ed y di prodotto costante è minima quando i due numeri sono uguali, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} xy = cost. \\ x>0,\ y>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x+y \text{ minimo per } x=y$$

Poniamo $\overline{AK}=x$; $V=\frac{\pi}{3}\overline{HC}^2\cdot\overline{AH}$; $\overline{AT}^2=\overline{AO}^2-\overline{OT}^2=(x+r)^2-r^2=$

$=x^2+2rx=x(x+2r)$

$\overline{HC}=\frac{\overline{OT}\cdot\overline{AH}}{\overline{AT}}$ (vedere II° metodo)

$$V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\overline{OT}^2\cdot\overline{AH}^3}{\overline{AT}^2}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{r^2\cdot(x+2r)^3}{x(x+2r)}=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{(x+2r)^2}{x}=$$

$$=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{x^2+4rx+4r^2}{x}=\frac{\pi r^2}{3}\left(x+\frac{4r^2}{x}+4r\right) \quad \text{con } x>0$$

Il minimo di $V(x)$ coincide col minimo di

$$f(x)=\frac{3V}{\pi r^2}-4r=x+\frac{4r^2}{x}$$

$f(x)$ è la somma di due termini positivi $\left(x, \frac{4r^2}{x}\right)$ il cui prodotto $x \cdot \frac{4r^2}{x} = 4r^2$ è costante.

Quindi $f(x)$ è minima quando risulta $x = \frac{4r^2}{x}$

$(x^2 - 4r^2) = 0 \quad (x+2r)(x-2r) = 0 \qquad x = 2r \; ; h = 4r ; b = r\sqrt{2}$

Secondo metodo

Poniamo $h = x$; $\overline{AT}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OT}^2 = (x-r)^2 - r^2 = x^2 - 2rx = x(x-2r)$

$$\overset{\triangle}{ATO} \,[1]\, \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AT} : \overline{OT} = \overline{AH} : \overline{HC} \\ \overline{AT} : \overline{AO} = \overline{AH} : \overline{AC} \end{cases} \qquad \overline{HC} = \frac{\overline{OT}\cdot\overline{AH}}{\overline{AT}} \; ; \; \overline{AC} = \frac{\overline{AO}\cdot\overline{AH}}{\overline{AT}}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi b^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{HC}^2 \cdot \overline{AH} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\overline{OT}^2 \cdot \overline{AH}^3}{\overline{AT}^2} = \frac{\pi}{3} \frac{r^2 x^3}{x(x-2r)}$$

$$V(x) = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{x^2}{x-2r}$$ con $x > 0$ o meglio $x > 2r$

$$S_t = \pi b^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi b a = \pi b (b+a) = \pi \overline{HC}(\overline{HC} + \overline{AC}) =$$

$$= \pi \cdot \frac{\overline{OT}\cdot\overline{AH}}{\overline{AT}} \left(\frac{\overline{OT}\cdot\overline{AH}}{\overline{AT}} + \frac{\overline{AO}\cdot\overline{AH}}{\overline{AT}} \right) = \pi \cdot \frac{\overline{OT}\cdot\overline{AH}^2}{\overline{AT}^2} \left(\overline{OT} + \overline{AO} \right) =$$

$$= \pi \cdot \frac{r x^2}{x(x-2r)} \cdot x = \pi r \cdot \frac{x^2}{x-2r} \qquad (x)$$

(x) Il ~~massimo~~ minimo di V coincide col minimo di $\frac{3V}{\pi r^2} = \frac{x^2}{x-2r}$ cioè col massimo di $\frac{x-2r}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2r}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{2r}{x}\right) = \frac{\pi r^2}{3V}$. Si ha pure:

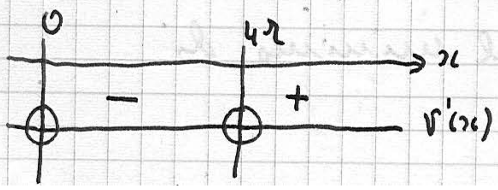
$$\frac{2\pi r^3}{3V} = \frac{2r}{x}\left(1 - \frac{2r}{x}\right) \qquad \frac{2r}{x} = 1 - \frac{2r}{x} \; ; \; x = 4r$$

Essendo $S_t = \frac{3}{r} V$ deduciamo che il minimo di S coincide col minimo di V.

$$V'(x) = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{2x(x-2r) - x^2}{(x-2r)^2} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{x(x-4r)}{(x-2r)^2}$$

$V'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ soluzione non accettabile

$x = 4r$



$x = 4r$ punto di minimo per la funzione $V(x)$

Pertanto il minimo di $V(x)$ è:

$$V(4r) = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{16 r^2}{4r - 2r} = \frac{8}{3} \pi r^3$$

mentre il minimo di $S(x)$ è:

$$S(4r) = \pi r^2 \cdot \frac{16 r^2}{4r - 2r} = 8 \pi r^2$$

Volume sfera: $V_S = \frac{4}{3} \pi r^3$

Superficie sfera: $S_S = 4 \pi r^2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} V_{cono} = 2 V_S \\ S_{t\,cono} = 2 S_S \end{cases}$$

N.B. Se poniamo $\overline{AO} = x$ otteniamo $V = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{(x+r)^2}{(x-r)}$

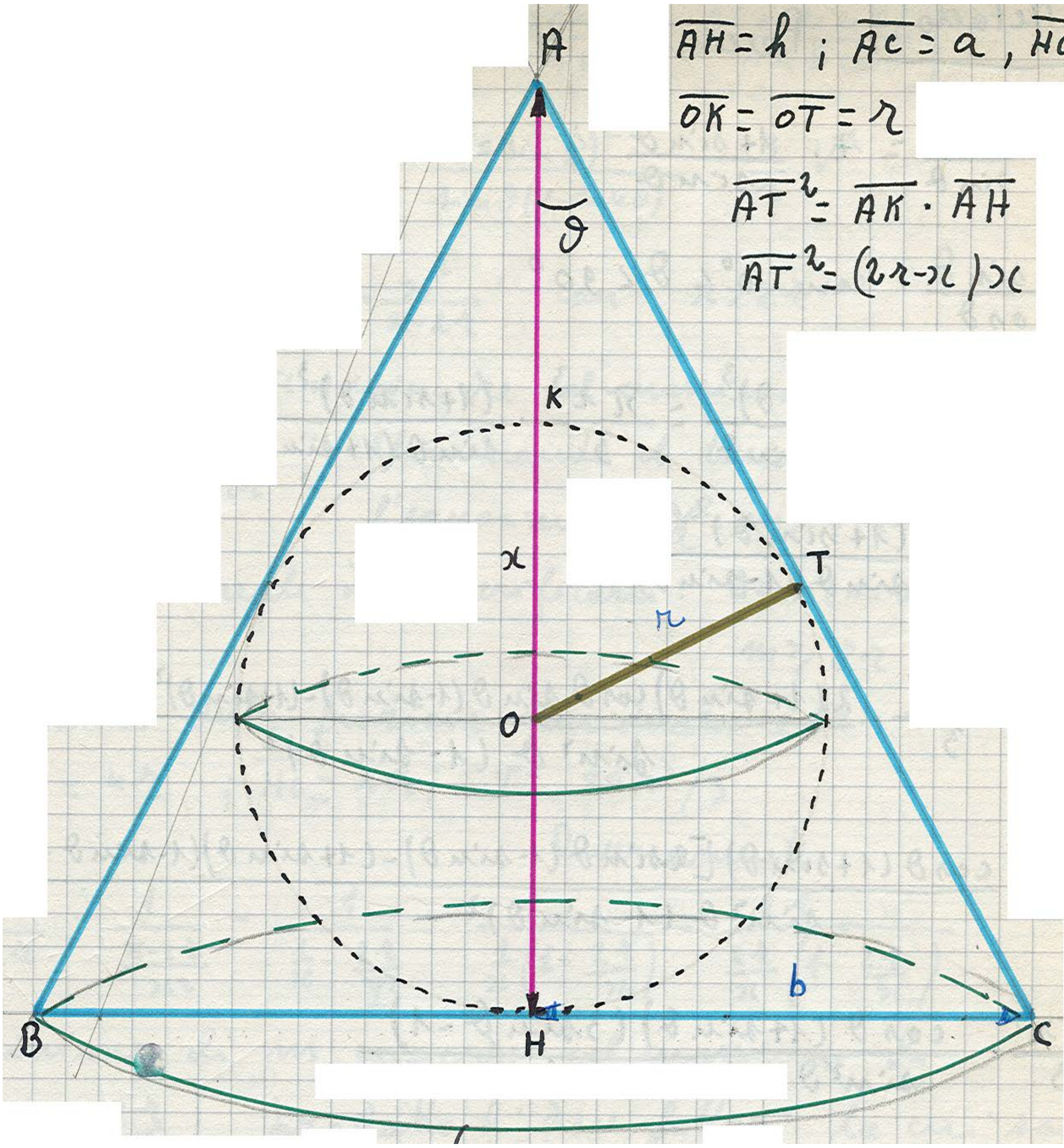
$$S_t = \pi r \cdot \frac{(x+r)^2}{x-r}$$

$\overline{AH} = h$; $\overline{AC} = a$, $\overline{HC} = b$

$\overline{OK} = \overline{OT} = r$

$\overline{AT}^2 = \overline{AK} \cdot \overline{AH}$

$\overline{AT}^2 = (2r - x)x$



Terzo metodo

Poniamo $H\hat{A}C = \vartheta$; $\overline{OA} = \dfrac{r}{\sin\vartheta}$;

$h = r + \dfrac{r}{\sin\vartheta} = r \cdot \dfrac{1+\sin\vartheta}{\sin\vartheta}$; $b = h \operatorname{tg}\vartheta = r \cdot \dfrac{1+\sin\vartheta}{\sin\vartheta} \cdot \dfrac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$

$b = r\dfrac{1+\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$ con $0° < \vartheta < 90°$

$$V = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{(1+\sin\theta)^3}{\cos^2\theta \sin\theta} = \frac{\pi r^3}{3} \cdot \frac{(1+\sin\theta)^3}{\sin\theta(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} =$$

$$= \frac{\pi r^3}{3} \cdot \frac{(1+\sin\theta)^2}{\sin\theta(1-\sin\theta)}$$

$$V'(\theta) = \frac{\pi r^3}{3} \cdot \frac{2(1+\sin\theta)\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta) - (1+\sin\theta)^2[\cos\theta(1-\sin\theta) - \sin\theta_{\cdot\cdot}}{\sin^2\theta(1-\sin\theta)^2}$$

$$= \frac{\pi r^3}{3} \cdot \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)[2\sin\theta(1-\sin\theta) - (1+\sin\theta)(1-\sin\theta-\sin\theta)]}{\sin^2\theta(1-\sin\theta)^2} =$$

$$= \frac{\pi r^3}{3} \cdot \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)(3\sin\theta-1)}{\sin^2\theta(1-\sin\theta)^2}$$

$V'(\theta) = 0 \Longrightarrow 3\sin\theta - 1 = 0 \quad \sin\theta = \frac{1}{3} \qquad \theta_0 \cong 19°28'$

θ	$0°$		θ_0		$90°$
$V'(\theta)$		$-$	0	$+$	

$\theta_0 = \arcsin\frac{1}{3}$ è un punto di minimo (assoluto) per la funzione $V(\theta)$.

$$\cos\theta_0 = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad ; \quad h = r\frac{1+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 4r$$

$$V(\theta_0) = \frac{\pi r^3}{3} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\pi r^3}{3} \cdot \frac{\frac{16}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{8}{3}\pi r^3$$

$$b = a\sin\theta \, ; \qquad a = \frac{b}{\sin\theta} = \frac{r(1+\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$S_t = \pi b(b+a) = \pi \cdot \frac{r(1+\sin\theta)}{\cos\theta}\left(\frac{r(1+\sin\theta)}{\cos\theta} + \frac{r(1+\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\right] =$$

$$= \pi r^2 \cdot \frac{(1+\sin\vartheta)^3}{\sin\vartheta\cos^2\vartheta} = \pi r^2 \cdot \frac{(1+\sin\vartheta)^2}{\sin\vartheta(1-\sin\vartheta)} = \frac{3}{r} V$$

IV Metodo (indiretto) $V(x) = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{x^2}{x-2r}$ con $x > 2r$

Il massimo di $V(x)$ coincide col massimo di

$m = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{x^2}{x-2r}$; Eliminando il denominatore otteniamo l'equazione: $x^2 - mx + 2rm = 0$

Affinché x sia reale deve verificarsi: $\Delta = m(m-8r) \geq 0$ cioè $m \geq 8r$

Il minimo della frazione considerata è $8r$. In tal caso è:

$x = \frac{m}{2} = 4r$; $\overline{HC} = r\sqrt{2}$; $V = 8\pi r^3/3$

Diversamente

$$m = \frac{x^2}{x-2r} = \frac{1}{\frac{x-2r}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{2r}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x}\left(1-\frac{2r}{x}\right)} = \frac{2r}{\frac{2r}{x}\left(1-\frac{2r}{x}\right)}$$

Il minimo di m coincide col massimo di

$\frac{2r}{x}\left(1-\frac{2r}{x}\right)$ prodotto di due fattori la cui somma è costante.

Esso si ottiene per $\frac{2r}{x} = 1 - \frac{2r}{x}$ cioè $x = 4r$

V Metodo Pongo $K = \frac{3V}{\pi r^3}$ ottengo $K = \frac{1+2\sin\vartheta+\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta - \sin^2\vartheta}$

$(1+K)\sin^2\vartheta + (2-K)\sin\vartheta + 1 = 0$ Le radici di questa equazione sono reali se:

$\Delta = K^2 - 8K = K(K-8) \geq 0$ cioè se $K \geq 8$

Pertanto il volume minimo vale $\frac{8}{3}\pi r^2$ e si ottiene per:

$\sin\vartheta = -\frac{b}{2a} = \frac{K-2}{2(1+K)} = \frac{6}{2\cdot 9} = \frac{1}{3}$