Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti.

1. Date le due parabole di equazioni $y = x^2 - 7x + 12$, $y = 4x^2 - 25 + 36$,

si determinino le coordinate dei punti comuni, le equazioni delle tangenti comuni e le coordinate dei punti di contatto. Si calcoli poi l'area di una delle regioni piane limitate da dette tangenti.

Coordinate dei punti comuni alle due curve. Le coordinate dei punti comuni alle due parabole si trovano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = 4x^2 - 25x + 36 \end{cases}$$

$$4x^2 - 25x + 36 = x^2 - 7x + 12$$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0 \longrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{1} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$y_1 = y(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 12 = 2$, quindi $A(2, 2)$;

$y_2 = y(4) = 4^2 - 7 \cdot 4 + 12 = 0$, quindi: $B(4, 0)$.

Prima parabola. $x_{V_1} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-7}{2} = \dfrac{7}{2}$; $y_{V_1} = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{49-48}{4} = -\dfrac{1}{4}$

$$V_1\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}\right) \quad x = \frac{3}{2} \longrightarrow y = \frac{9}{4} - 7 \cdot \frac{3}{2} + 12 = \frac{9 - 42 + 48}{4} = \frac{15}{4} \longrightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$$

$$x = \frac{5}{2} \longrightarrow y = \frac{25}{4} - 7 \cdot \frac{5}{2} + 12 = \frac{25 - 70 + 48}{4} = \frac{3}{4} \longrightarrow \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

Seconda parabola. $x_{V_2} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-25}{8} = \dfrac{25}{8}$; $y_{V_2} = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{625-576}{16} = -\dfrac{49}{16}$

$$V_2\left(\frac{25}{8}; -\frac{49}{16}\right) \quad x = \frac{5}{2} \longrightarrow y = 4 \cdot \frac{25}{4} - 25 \cdot \frac{5}{2} + 36 = 61 - \frac{125}{2} = -\frac{3}{2} \longrightarrow \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Equazioni delle tangenti comuni.

Sia $y = mx + q$ l'equazione di una generica retta t. Affinché t sia tangente alla prima parabola, deve essere nullo il discriminante dell'equazione che risolve il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = x^2 - 7x + 12 \end{cases} \longrightarrow \quad x^2 - 7x + 12 = mx + q \quad \longrightarrow \quad x^2 - (m+7)x - (q-12) = 0$$

$$\Delta = (m+7)^2 + 4(q-12) = m^2 + 14m + 49 + 4q - 48 = \ m^2 + 14m + 4q + 1;$$

cioè: $\quad m^2 + 14m + 4q + 1 = 0.$

Per la tangente alla seconda parabola abbiamo:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = 4x^2 - 25x + 36 \end{cases} \longrightarrow \quad 4x^2 - 25x + 36 - mx - q = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad 4x^2 - (m+25)x - (q-36) = 0;$$

$$\Delta = (m+25)^2 + 16(q-36) = m^2 + 50m + 625 + 16q - 576 =$$
$$= m^2 + 50m + 16q + 49;$$

$$\Delta = (m+25)^2 + 16(q-36) = m^2 + 50m + 625 + 16q - 576 =$$
$$= m^2 + 50m + 16q + 49;$$

cioè: $\quad m^2 + 50m + 16q + 49 = 0.$

Per avere i valori di m e q che determinano le tangenti comuni alle due curve, basta dunque risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} m^2 + 14m + 4q + 1 = 0 \\ m^2 + 50m + 16q + 49 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{-m^2 - 14m - 1}{4} \\ m^2 + 50m + 16 \cdot \dfrac{-m^2 - 14m - 1}{4} + 49 = 0 \end{cases}$$

$$m^2 + 50m - 4m^2 - 56m - 4 + 49 = 0$$

$$-3m^2 - 6m + 45 = 0 \longrightarrow m^2 + 2m - 15 = 0;$$

$$\frac{d}{4} = 1 + 15 = 16 > 0; \qquad m = -1 \pm \sqrt{16} = \begin{cases} m_1 = -1 - 4 = -5 \\ m_2 = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

$$q_1 = q(m_1) = \frac{-25 - 14 \cdot (-5) - 1}{4} = \frac{-25 + 70 - 1}{4} = 11;$$

$$q_2 = q(m_2) = \frac{-9 - 14 \cdot 3 - 1}{4} = \frac{-9 - 42 - 1}{4} = -13.$$

Le tangenti cercate hanno così equazioni:

$$y = -5x + 11 \qquad \text{e} \qquad y = 3x - 13.$$

<u>**Coordinate dei punti di contatto tra le rette e le curve.**</u> Le coordinate dei quattro punti C, D, E ed F di contatto si ottengono da:

$$x^2 - (m + 7)x - (q - 12) = 0 \longrightarrow x^2 - (-5 + 7)x - (11 - 12) = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \longrightarrow (x - 1)^2 = 0 \longrightarrow x_1 = 1;$$

$$y_1 = y(1) = -5 \cdot 1 + 11 = 6; \qquad C(1,\ 6).$$

$$4x^2 - (m + 25)x - (q - 36) = 0 \longrightarrow 4x^2 - (-5 + 25)x - (11 - 36) = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0 \longrightarrow (2x - 5)^2 = 0 \longrightarrow x_2 = \frac{5}{2};$$

$$y_2 = y\left(\frac{5}{2}\right) = -5 \cdot \frac{5}{2} + 11 = -\frac{25}{2} + 11 = -\frac{3}{2}; \qquad D\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right).$$

$$x^2 - (m + 7)x - (q - 12) = 0 \longrightarrow x^2 - (3 + 7)x - (-13 - 12) = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \longrightarrow (x - 5)^2 = 0 \longrightarrow x_3 = 5;$$

$$y_3 = y(5) = 3 \cdot 5 - 13 = 2; \qquad E(5,\ 2).$$

$$4x^2 - (m + 25)x - (q - 36) = 0 \longrightarrow 4x^2 - (3 + 25)x - (-13 - 36) = 0 \longrightarrow$$

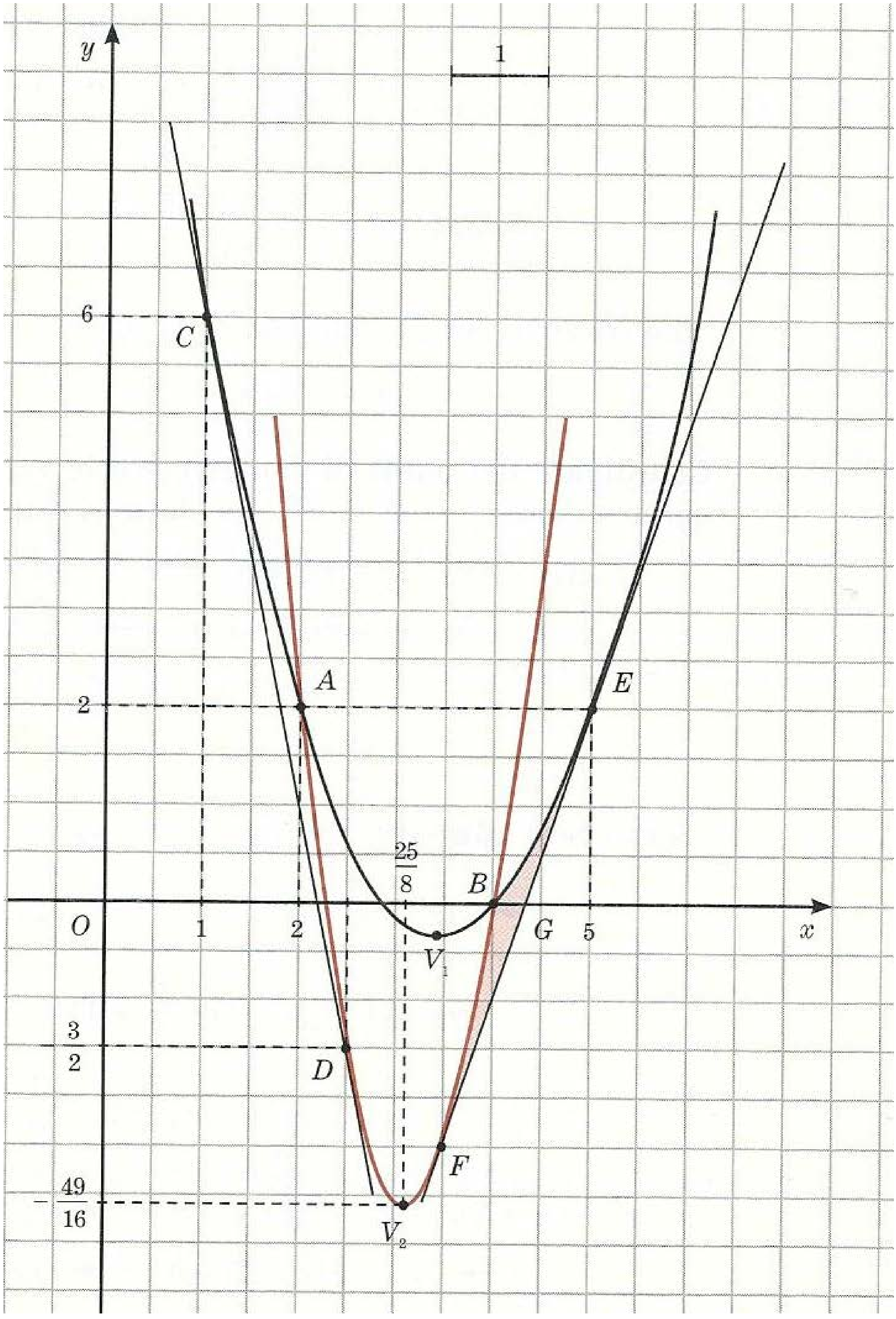
$$\longrightarrow 4x^2 - 28x + 49 = 0 \longrightarrow (2x - 7)^2 = 0 \longrightarrow x_4 = \frac{7}{2};$$

$$y_4 = y\left(\frac{7}{2}\right) = 3 \cdot \frac{7}{2} - 13 = \frac{21}{2} - 13 = -\frac{5}{2}; \quad F\left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right).$$

Area della regione piana richiesta.

Scegliamo la regione delimitata dal triangolo mistilineo FBE (tratteggiata in figura) e indichiamo con G il punto d'intersezione della tangente $y = 3x - 13$ con l'asse delle x, cioè

$$3x - 13 = 0 \longrightarrow x = \frac{13}{3} \longrightarrow G\left(\frac{13}{3}, 0\right).$$


y
x
1
O
6
C
A
2
E
B
G
5
V1
D
F
25/8
3/2
-49/16
V2
1
2

$$S_{FBEG}=\left|\int_{x_F}^{x_G}(3x-13)dx-\int_{x_F}^{x_B}(4x^2-25x+36)dx\right|+\int_{x_B}^{x_E}(x^2-7x+12)dx-\int_{x_G}^{x_E}(3x-13)dx=$$

$$=-\int_{7/2}^{13/3}(3x-13)dx+\int_{7/2}^{4}(4x^2-25x+36)dx+\int_{4}^{5}(x^2-7x+12)dx-\int_{13/3}^{5}(3x-13)dx=$$

$$=-\int_{7/2}^{5}(3x-13)dx+\int_{7/2}^{4}(4x^2-25x+36)dx+\int_{4}^{5}(x^2-7x+12)dx=$$

$$=\left[\frac{3}{2}x^2-13x\right]_5^{7/2}+\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{25}{2}x^2+36x\right]_{7/2}^{4}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{7}{2}x^2+12x\right]_4^5=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{49}{4}-13\cdot\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\cdot25+13\cdot5+\frac{4}{3}\cdot64-\frac{25}{2}\cdot16+36\cdot4-\frac{4}{3}\cdot\frac{343}{8}+$$

$$+\frac{25}{2}\cdot\frac{49}{4}-36\cdot\frac{7}{2}+\frac{125}{3}-\frac{7}{2}\cdot25+12\cdot5-\frac{64}{3}+\frac{7}{2}\cdot16-12\cdot4=$$

$$=\frac{147}{8}-\frac{91}{2}-\frac{75}{2}+65+\frac{256}{3}-200+144-\frac{343}{6}+\frac{1225}{8}-126+$$

$$+\frac{125}{3}-\frac{175}{2}+60-\frac{64}{3}+56-48=$$

$$=-49+\frac{1372}{8}-\frac{343}{6}+\frac{317}{3}-\frac{341}{2}=\frac{-1176+4116-1372+2536-4092}{24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

2. Si disegni la curva di equazione: $$y=\frac{2x}{x^2+x-1}.$$

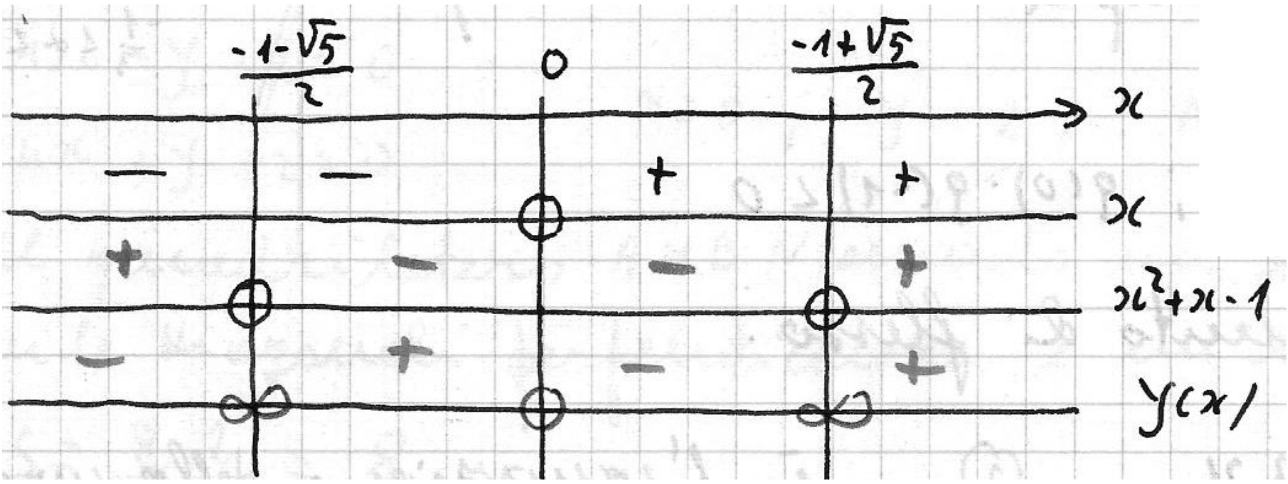
Si determinino le coordinate dei punti comuni ad essa e alla sua simmetrica rispetto all'asse y e si calcoli l'area del quadrilatero convesso formato dalle tangenti alle due curve nei punti comuni di ascissa non nulla.

Campo di esistenza: $x\neq\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$

Segno della funzione:

$y(x)>0$ per $\frac{-1-\sqrt5}{2}<x<0$; $x>\frac{-1+\sqrt5}{2}$

$y(x)<0$ per $x<\frac{-1-\sqrt5}{2}$; $0<x<\frac{-1+\sqrt5}{2}$



Campo di variabilità

$yx^2+(y-2)x-y=0 \qquad \Delta=(y-2)^2+4y^2=5y^2-4y+4$ sempre >0

quindi il campo di variabilità è l'intervallo $(-\infty,+\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$x=0 \Rightarrow y=0 \quad ; \quad y=0 \Rightarrow x=0$

La curva passa per il punto $O\equiv(0,0)$.

Asintoti

La curva ammette due asintoti verticali $x=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$ ed un asintoto orizzontale $y=0$ (asse x).

Massimi - Minimi

$$y'(x)=\frac{2(x^2+x-1)-2x(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}=\frac{2(x^2+x-1-2x^2-x)}{(x^2+x-1)^2}=\frac{-2(x^2+1)}{(x^2+x-1)^2}$$

$y'(x)$ è una funzione sempre negativa per cui $y(x)$ è una funzione sempre decrescente che non ammette né massimi, né minimi.

Flessi

$$y''(x) = -2 \cdot \frac{2x(x^2+x-1)^2 - 2(x^2+1)(x^2+x-1)(2x+1)}{(x^2+x-1)^4} = \frac{4(x^3+3x+1)}{(x^2+x-1)^3}$$

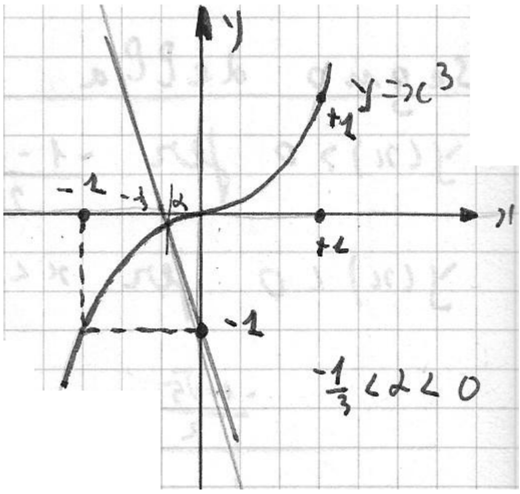
$g(x) = x^3+3x+1 = (x-\alpha)(x^2+px+q)$

con $-1 < \alpha < 0$ e

x^2+px+q trinomio

di 2° grado in x sempre

positivo.



$g(-1) = -3$; $g(0) = 1$; $g(0) \cdot g(-1) < 0$ $x = \alpha$ è un punto di flesso

$\varphi(x) = y(-x) = \dfrac{-2x}{x^2-x-1}$ (2) è l'equazione della curva σ_1 simmetrica rispetto all'asse y della curva σ avente equazione (1).

$O \equiv (0,0)$, $A \equiv (1,2)$, $B \equiv (-1,2)$ sono i punti comuni alle due curve. Infatti:

$$\begin{cases} \sigma & y = \dfrac{2x}{x^2+x-1} \\ \sigma_1 & y = \dfrac{-2x}{x^2-x-1} \end{cases}$$

$x^3+x^2-x = -x^3+x^2+x$

$2x(x^2-1) = 0$ $\quad x = 0$, $y = 0$

$2x^3-2x = 0$

$x = \pm 1$

$y = \pm 2$

Equazione della retta t_1 tangente a σ in A:

$y'(1) = -4$; $y-2 = -4(x-1)$; $y = -4x+6$; $4x+y-6 = 0$

Equazione della retta t_2 tangente a σ in $B \equiv (-1,2)$

$y'(-1) = -4$; $y-2 = -4(x+1)$; $y = -4x-2$; $4x+y+2 = 0$

Equazione della retta t_3 tangente a σ_1 in $A \equiv (1,2)$

$\varphi'(x) = \dfrac{2(x^2+1)}{(x^2+x-1)^2}$; $\varphi'(1) = \varphi'(-1) = 4$; $y-2 = 4(x-1)$

$4x-y-2 = 0$; $y = 4x-2$

Equazione della retta t_4 tangente a σ_1 in B:

$y-2=4(x+1)$; $4x-y+6=0$ $\quad y=4x+6$

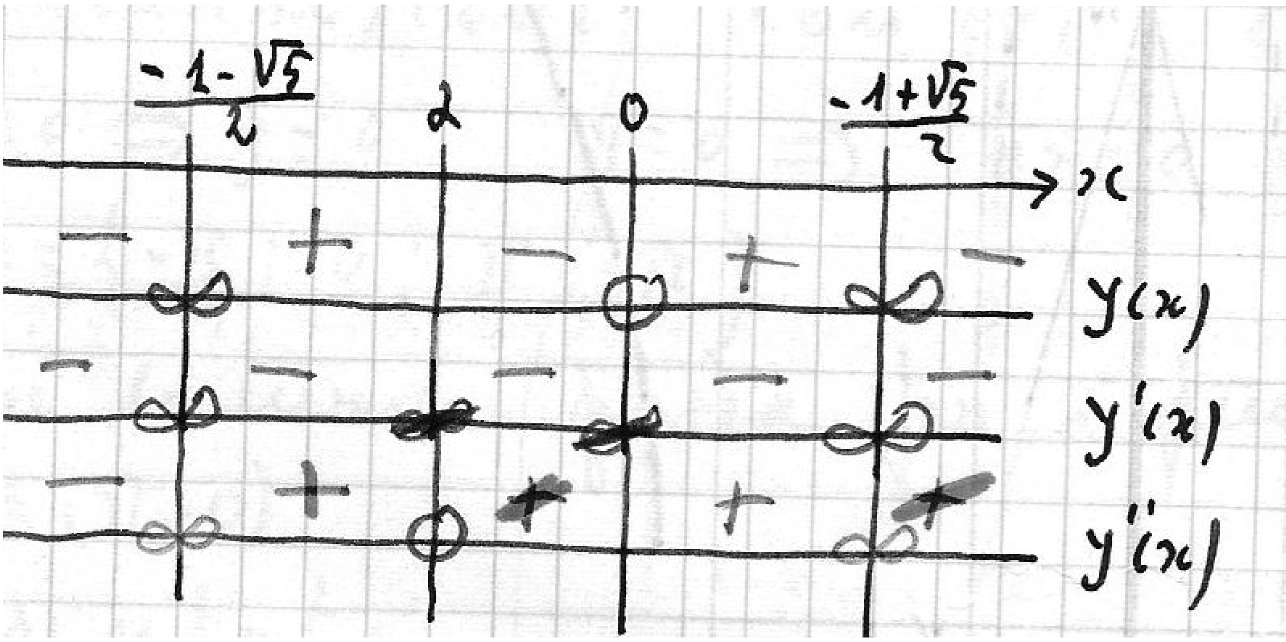
Il quadrilatero individuato dalle quattro tangenti ha come vertici i punti A, B, $M\equiv(0,6)$, $N\equiv(0,-2)$.

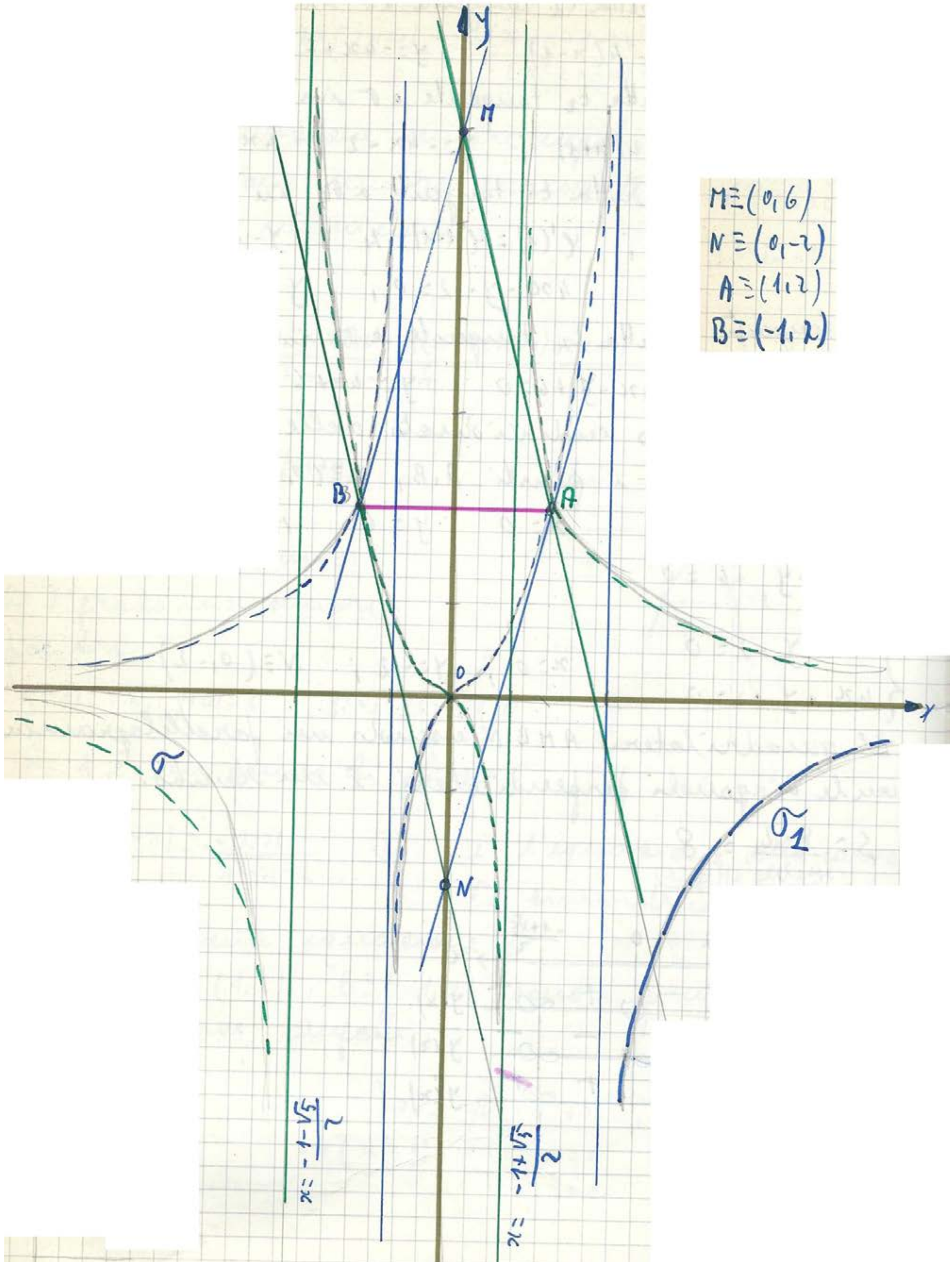
$$\begin{cases}4x+y-6=0\\4x-y+6=0\end{cases} \quad x=0\ ;\ y=6 \quad M\equiv(0,6)$$

$$\begin{cases}4x-y-2=0\\4x+y+2=0\end{cases} \quad x=0 \quad y=-2 \quad N\equiv(0,-2)$$

Il quadrilatero $AMBN$ essendo un parallelogramma con le diagonali perpendicolari è un rombo.

$$S=\frac{8\cdot 2}{2}=8$$




M ≡ (0, 6)
N ≡ (0, -2)
A ≡ (1, 2)
B ≡ (-1, 2)
y
x
M
N
A
B
O
σ
σ1
x = (-1-√5)/2
x = (-1+√5)/2

3. Si studi la variazione della funzione: $y = \tan x - 2\sin x$ nell'intervallo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$.

Simmetrie Evidenti

$y(-x) = tg(-x) - 2\sin(-x) = -tg\,x + 2\sin x = -(tg\,x - 2\sin x) = -y(x)$

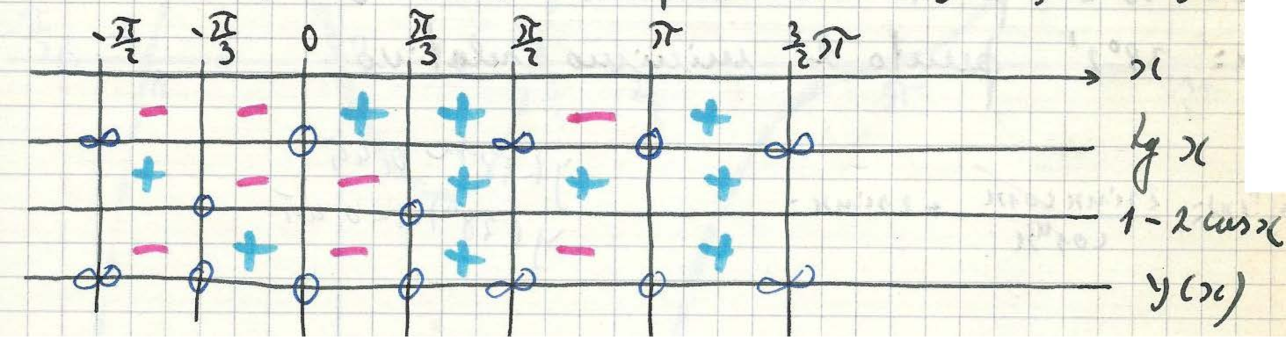
La curva è simmetrica rispetto all'origine degli assi.

Segno della funzione

$y(x) = tg\,x(1 - 2\cos x) > 0$ per $-\frac{\pi}{3} < x < 0$; $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$; $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

$tg\,x > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

$1 - 2\cos x > 0$ per $\cos x < \frac{1}{2}$ cioè per: $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} < x < \frac{3}{2}\pi$



Intersezioni con gli assi

$x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow tg\,x = 0$ $\cos x = \frac{1}{2}$ cioè $x = \{-\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}; \pi\}$

cioè la curva passa per i punti $A \equiv (-\frac{\pi}{3}, 0)$; $B \equiv (\frac{\pi}{3}, 0)$ $C \equiv (\pi, 0)$

Asintoti

La curva presenta tre asintoti verticali di equazioni:

$x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3}{2}\pi$

Massimi, minimi, crescenza, decrescenza

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2\cos x = \frac{1 - 2\cos^3 x}{\cos^2 x}$$

$y'(x) = 0 \Rightarrow \quad 1 - 2\cos^3 x = 0 \quad$ cioè $(1 - \sqrt[3]{2}\cos x)(1 + \sqrt[3]{2}\cos x + \sqrt[3]{4}\cos^2 x) = 0$

l'equazione $1 + \sqrt[3]{2}\cos x + \sqrt[3]{4}\cos^2 x = 0$ non ammette radici reali. $\quad 1 - \sqrt[3]{2}\cos x = 0 \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $\log\cos x = \frac{1}{3}\,\text{colog}\, 2 =$

$= \frac{1}{3} \cdot \bar{1},69897 = \bar{1},89632 \quad ; \quad x = 38^\circ 2'$

$x_1 = -38^\circ 2' \quad ; \quad x_2 = 38^\circ 2'$

$y'(x) > 0$ per $\cos x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ cioè per $-\frac{\pi}{2} < x < -38^\circ 2'$; $38^\circ 2' < x < 270^\circ$

$y'(x) < 0$ per $-38^\circ 2' < x < 38^\circ 2'$

$x = -38^\circ 2'$ punto di massimo relativo

$x = 38^\circ 2'$ punto di minimo relativo

Flessi

$$y''(x) = \frac{2\sin x\,\cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{4}\,3} x} + 2\sin x = \frac{2\sin x\left(\cos^3 x + 1\right)}{\cos^3 x} = \frac{2\,tg\,x\left(\cos^3 x + 1\right)}{\cos^2 x}$$

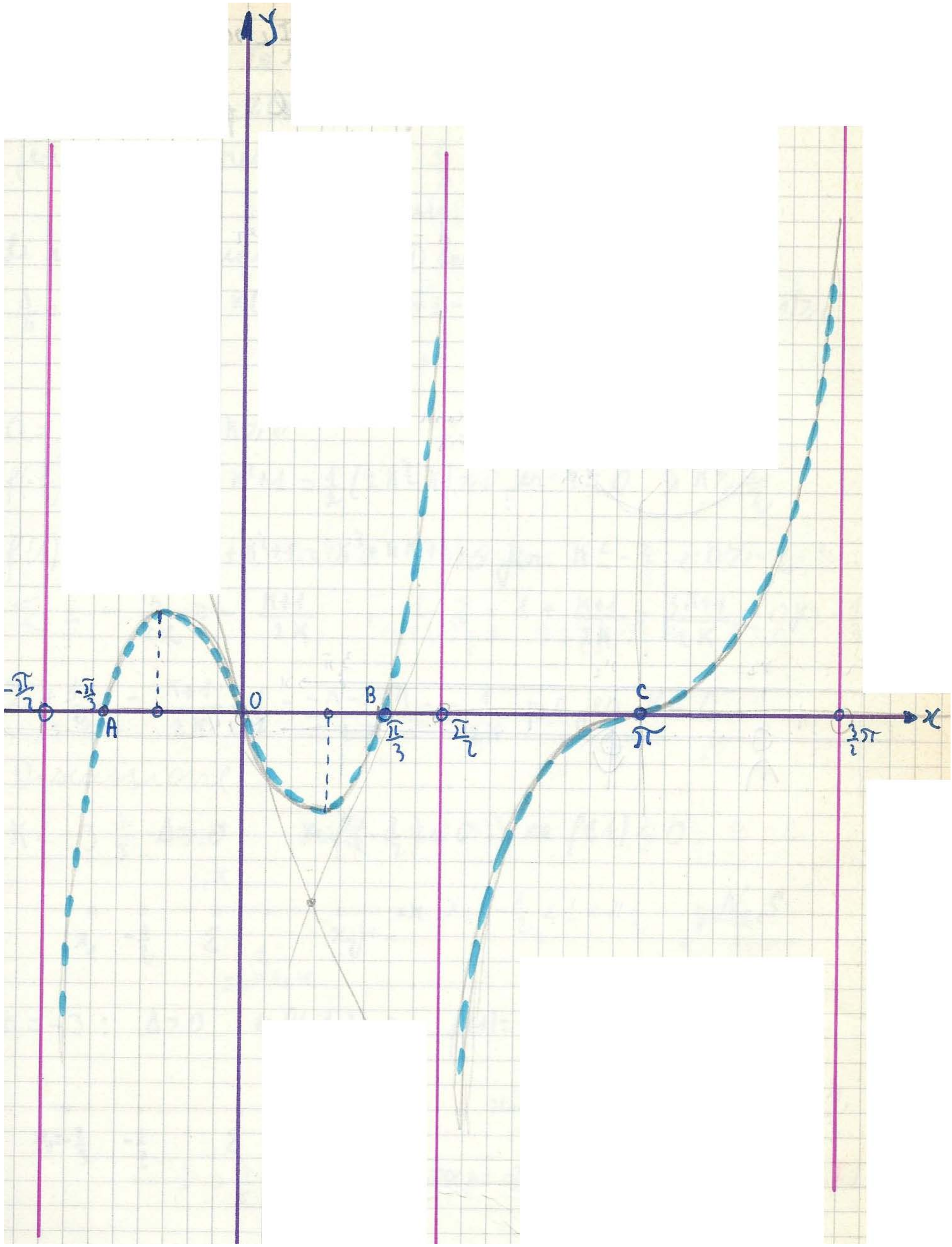
$y''(x) = 0 \Rightarrow \quad tg\,x = 0 \quad$ cioè $\quad x = 0 \quad$ e $\quad \cos^3 x + 1 = 0 \quad$ cioè

$x = \pi$

$y''(x) > 0$ per $tg\,x > 0$ cioè per $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

$y''(x) < 0$ se $tg\,x < 0$ cioè se: $-\frac{\pi}{2} < x < 0$; $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$x = 0$ ed $x = \pi$ sono due punti di flesso



y
x
O
A
B
C
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$

4. Si discuta l'equazione: $2kx^2+2(k+1)x+k^2+1=0$ per x compreso tra $-1/2$ ed 1.

Le radici dell'equazione ① sono reali se:

$\frac{\Delta}{4}=k^2+2k+1-2k(k^2+1)=k^2+2k+1-2k^3+k^2+1=(k-1)(-2k^2-k-1)\geq 0$ cioè se: $k\leq 1$

$a=2k\geq 0$ per $k\geq 0$

$f(-\frac{1}{2})=\frac{k}{2}-k-1+k^2+1=\frac{1}{2}(2k^2-k)\geq 0$ per $k\leq 0$ e $k\geq \frac{1}{2}$

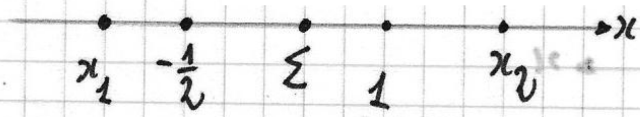
$f(1)=2k+2k+2+k^2+1=k^2+4k+3\geq 0$ per $k\leq -3$ e $k\geq -1$

$\Sigma=-\frac{b}{2a}=-\frac{k+1}{2k}$; $1-\Sigma=1+\frac{k+1}{2k}=\frac{3k+1}{2k}\leq 0$ per $-\frac{1}{3}\leq k<0$

$\Sigma+\frac{1}{2}=-\frac{k+1}{2k}+\frac{1}{2}=\frac{-k-1+k}{2k}=-\frac{1}{2k}\geq 0$ per $k<0$

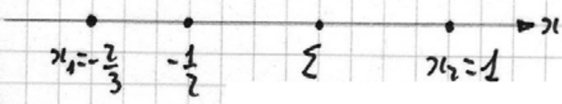
Discussione

$k<-3$: $\Delta>0$ $af(-\frac{1}{2})<0$ e $f(1)<0$



$x_1<-\frac{1}{2}<1<x_2$ N.S.

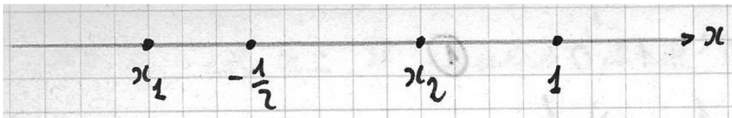
$k=-3$: $\Delta>0$ $af(-\frac{1}{2})<0$ $f(1)=0$ $x_2=1$, $x_1+x_2=-\frac{b}{2a}=\frac{k+1}{2k}$



$x_1+x_2=\frac{-3+1}{-6}=\frac{1}{3}$, $x_1=-\frac{2}{3}$

$x_1=-\frac{2}{3}<-\frac{1}{2}<x_2=1$ 1 S.L.

$-3<k<-1$: $\Delta>0$ $af(-1)<0$ $af(1)>0$

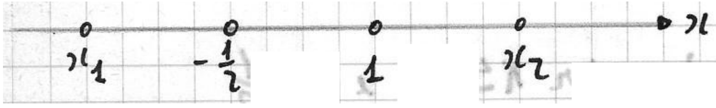


$x_1<-\frac{1}{2}<x_2<1$ 1 S.O.

$K = -1$: $\Delta > 0$ $\quad a f(-\frac{1}{2}) < 0$ $\quad f(1) = 0$ $\quad x_2 = 1$ $\quad x_1 = -1$

$-1 = x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 = 1$ $\quad$ 1 S. L.

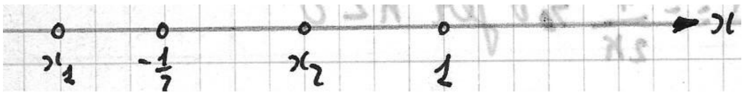
$-1 < K < 0$: $\Delta > 0$ $\quad a f(-\frac{1}{2}) < 0$ $\quad a f(1) < 0$



$x_1 < -\frac{1}{2} < 1 < x_2$ $\quad$ V. S

$K = 0$: $\Delta > 0$ $\quad x_1 = -\frac{1}{2}$ $\quad x_2 = \infty$ $\quad$ 1 S. L.

$0 < K < \frac{1}{2}$: $\Delta > 0$ $\quad a f(-\frac{1}{2}) < 0$ $\quad a f(1) > 0$

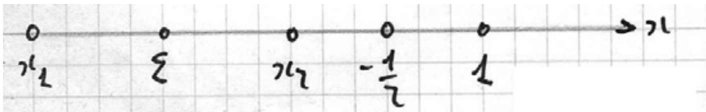


$x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 1$ $\quad$ 1 S. O.

$K = \frac{1}{2}$: $\Delta > 0$ $\quad f(-\frac{1}{2}) = 0$ $\quad a f(1) > 0$ $\quad \Sigma < 1$ $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

$x_1 < -\frac{1}{2} = x_2 < 1$ $\quad$ 1 S. L.

$\frac{1}{2} < K < 1$: $\Delta > 0$ $\quad a f(-\frac{1}{2}) > 0$ $\quad a f(1) > 0$ $\quad \Sigma < -\frac{1}{2} < 1$



$x_1 < x_2 < -\frac{1}{2} < 1$ $\quad$ N. S.

k		-3		-1		$\left(-\frac{1}{3}\right)$		0		$\frac{1}{2}$		1	
$\frac{\Delta}{4}$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
a	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(-\frac{1}{2})$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(1)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$1-\Sigma$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	∞	$+$		$+$		$+$
$\Sigma+\frac{1}{2}$	$+$		$+$		$+$		$+$	∞	$-$		$-$		$-$
	$x_1<-\frac{1}{2}<1<x_2$		$x_1<-\frac{1}{2}<x_2<1$		$x_1<-\frac{1}{2}<$		$1<x_2$		$x_1<-\frac{1}{2}<x_2<1$		$x_1<x_2<-\frac{1}{2}<1$		Radici complesse e coniugate
	N.S.		1 S.O.		N.S.				1 S.O.		N.S.		

$K=1$: $\Delta=0$ $x_1=x_2=\Sigma=-\frac{k+1}{2k}=-1$ $x_1=x_2=-1<-\frac{1}{2}<1$ N.S.