Problema 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate dall'estero, un canone fisso da 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. Individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.

2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "*nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio*"; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

Simboli usati:

$\mathbf{x}$ = numero di minuti di conversazioni effettuati in un mese ($\mathbf{0 \le x \le 43\,200}$

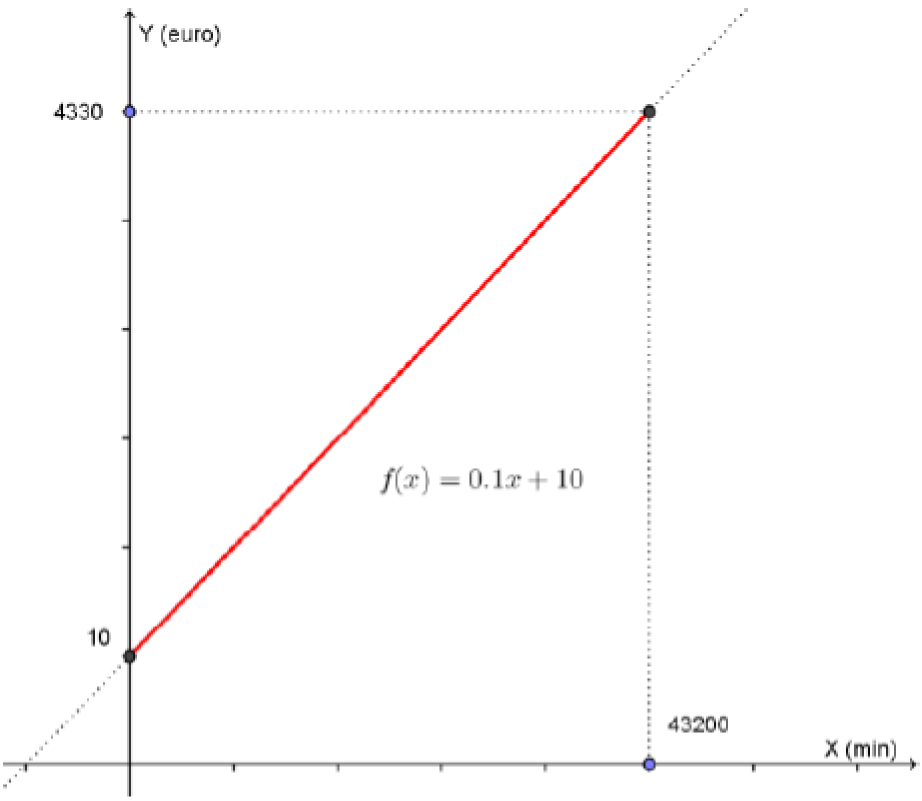
$f(\mathbf{x})$ = spesa totale in euro effettuata in un mese

$\mathbf{g(x)}$ = costo medio al minuto $\mathbf{30\,giorni = 30 \cdot 24 \cdot 60 = 42\,200\ minuti}$

Supponiamo che il tempo $\mathbf{x}$ sia una variabile continua e non una variabile discrete come lascerebbe supporre la misura del tempo $\mathbf{x}$ in minuti $(1,2,3,4,1,2,3,3,5,\cdots \text{minuti})$

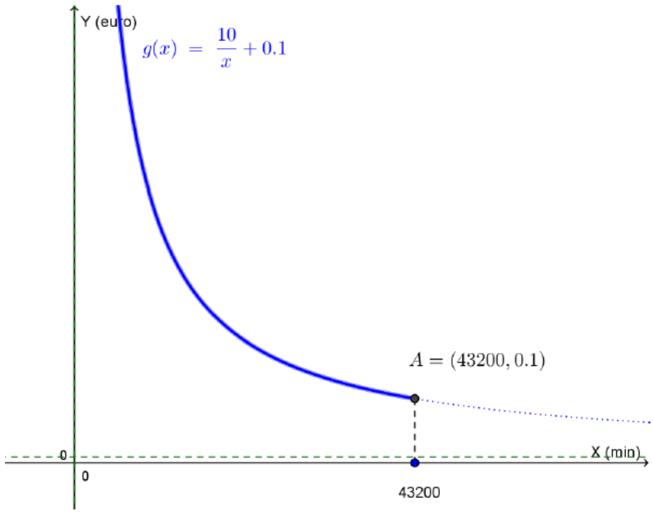
La spesa mensile in euro è espressa dalla funzione: $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\mathbf{x} + \mathbf{10}$ dove l'intercetta 10

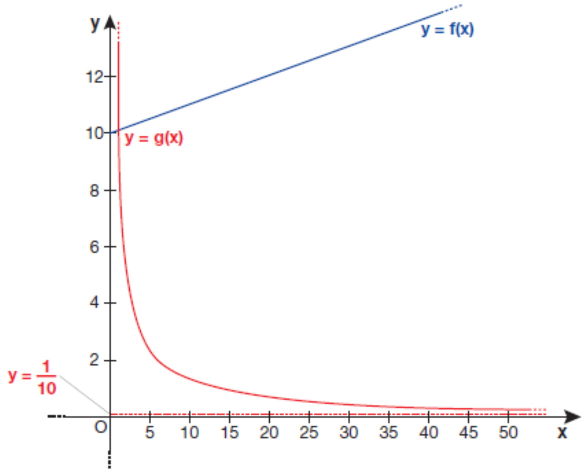
rappresenta il costo fisso ed il coefficiente angolare $m = \frac{1}{10}$ rappresenta il costo al minuto.

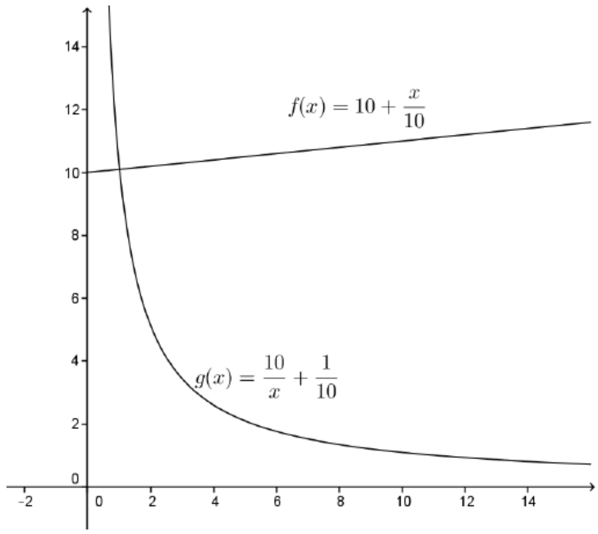


Il costo medio al minuto ci viene fornito dalla seguente funzione: $\mathbf{g(x)} = \frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{x+100}}{\mathbf{10\,x}}$

Si tratta di una iperbole equilatera che ha come asintoti l'asse y e la retta di equazione $y = \frac{1}{10}$







2. Detto x_o il numero dei minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che: $\mathbf{g(x_1) = \frac{g(x_o)}{2}}$.

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_o e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Il valore x_1 indica quanti minuti di conversazione occorrono per dimezzare il costo medio $g(x_o)$. Il problema da risolvere è il seguente: dopo avere effettuato x_o minuti di conversazione dobbiamo stabilire quanti minuti di conversazione x_1 dobbiamo effettuare per avere un costo medio dimezzato. Tradotto in termini matematici abbiamo:

$$\mathbf{g(x_1) = \frac{g(x_o)}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1+100}{10\,x_1} = \frac{x_o+100}{20\,x_o} \quad \Rightarrow \quad 2x_o(x_1+100) = x_1(x_o+100)$$

$$2x_o x_1 + 200\,x_o = x_o x_1 + 100\,x_1 \quad x_o\,x_1 - 100\,x_1 = -200\,x_o \quad (100 - x_o)\,x_1\ 200\,x_o \quad x_1 = \frac{200\,x_o}{100 - x_o}$$

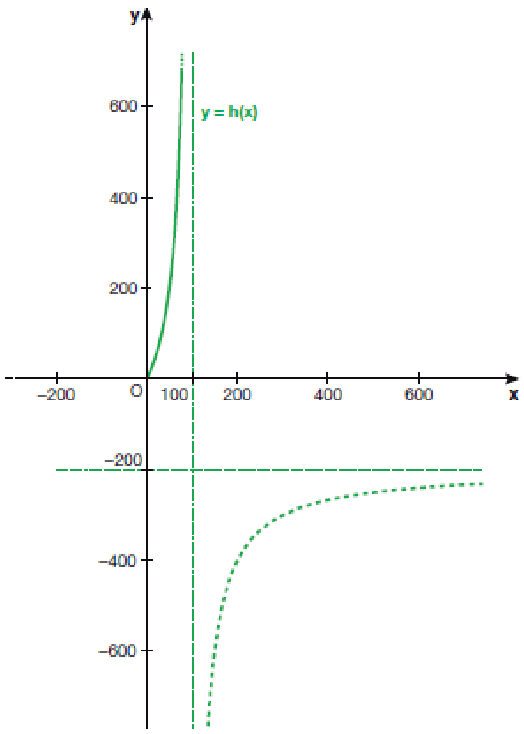
Ponendo $x_1 = h(x)$ e $x_o = x$ otteniamo: $\mathbf{h(x) = \dfrac{200\,x}{100 - x}}$

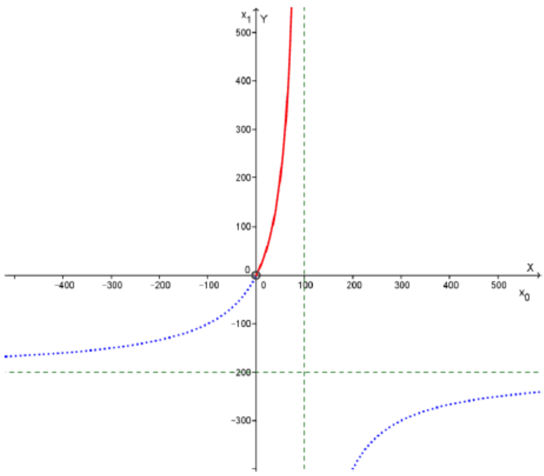
Si tratta di una iperbole equilatera di asintoti $x = 100$ e $y = -200$

$x > 100 \quad \Rightarrow \quad h(x) < 0$ Per questi valori non è possibile il dimezzamento dei costi medi

Infatti per $x > 100$ avremmo un numero $x_1 = h(x)$ negativo di minuti. Pertanto raggiunti o superati i 100 minuti di conversazione il costo medio non è dimezzabile. Possiamo concludere affermando che l'asintoto obliquo di equazione $x = 100$ esprime l'estremo superiore dei valori di x_o per cui l'uguaglianza proposta ammette soluzioni e dunque riesce ad ottenere il dimezzamento dei costi medi. $\mathbf{dom\,h(x) =]0;100[}$

Il grafico è quello indicato in figura. E' evidente che soltanto il ramo di iperbole situato nel primo quadrante ha significato reale.





Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B, C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x=6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

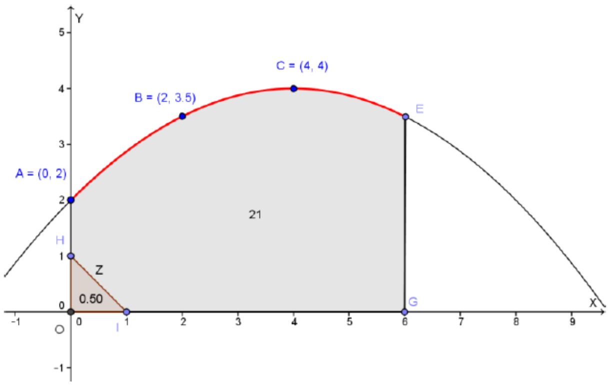
3. rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B, C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "*nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il* 96% *del territorio*"; verifica se effettivamente è così.

$y=ax^2+bx+c$ è la funzione polinomiale di secondo grado richiesta dal problema. So tratta di una parabola γ. $A(0;2)$ $B\left(2;\frac{7}{2}\right)$ $C(4;4)$

$$A\in\gamma \Rightarrow c=2 \quad B\in\gamma \Rightarrow \frac{7}{2}=4a+2b+c \quad C\in\gamma \Rightarrow 4=16a+4b+c$$

Il sistema da risolvere è il seguente: $\begin{cases} c = 2 \\ 8a+4b+2c=7 \\ 16a+4b+c=4 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{8} \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$ $\gamma: y=-\dfrac{1}{8}x^2+x+2$

Il punto $C(4;4)$ è il vertice della parabola γ. Il grafico della figura mette in evidenza la zona coperta dal segnale e quella non coperta.



La zona **Z** non coperta dal segnale è un triangolo isoscele di area $S_Z = \dfrac{1\cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5\,km^2$

L'area sottesa dalla parabola γ è:

$$S = \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right) d\,x = \left[-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^6 = -\frac{216}{24} + 18 + 12 = -9 + 30 = 21\,km^2$$

L'area coperta dal segnale è $\mathbf{S_C} = S - S_Z = 21 - 0{,}5 = \mathbf{20{,}5\,km^2}$

La percentuale dell'area coperta dal segnale è: $\mathbf{p} = \dfrac{S_C}{S_Z} = \dfrac{20{,}5}{21} = 0{,}976 = \mathbf{97{,}6\,\%}$

Tale rapporto risulta superiore alla copertura dichiarata dal gestore che è pari a **96 %**.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità,

individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

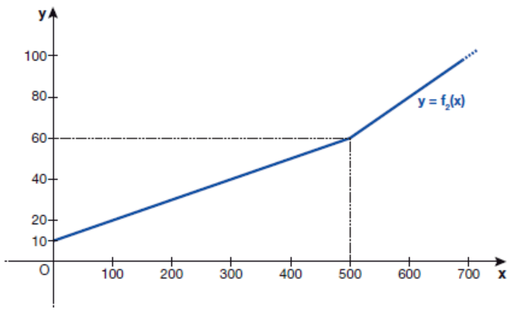
Dopo la modifica del piano tariffario le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ diventano delle funzioni a tratti ed assumono la seguente forma analitica:

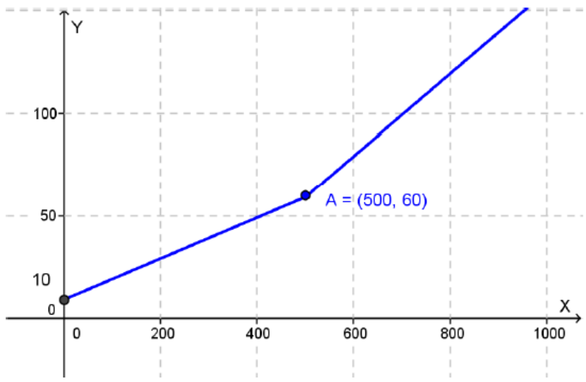
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{10}+10=\dfrac{x+100}{10} & se\ \ 0\le x\le 500 \\ \dfrac{x}{10}+10+\dfrac{x-500}{10}=\dfrac{x-200}{5} & se\ \ x>500 \end{cases} \qquad g(x)=\frac{f(x)}{x}=\begin{cases} \dfrac{x+100}{10x} & se\ \ 0<x\le 500 \\ \dfrac{x-200}{5x} & se\ \ x>500 \end{cases}$$

Le proprietà della nuova funzione $f(x)$ sono le seguenti:

(1) $dom\ f(x)=]0;+\infty[$ (2) la funzione è continua in tutto il suo dominio (3) nel punto $x=500$ presenta un punto angoloso in quanto risulta $f'(500-)=\frac{1}{10}\neq f'(500+)=\frac{1}{5}$ (4) presenta un minimo assoluto nel punto $x=0$ e tale minimo vale $f(0)=10\,€$

Il grafico di questa funzione è il seguente:





Le proprietà della nuova funzione $g(x)$ sono le seguenti:

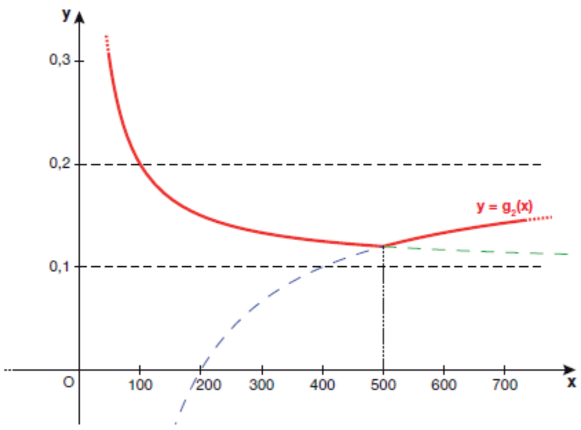
(1) $dom\ g(x)=]0;+\infty[$ (2) nel punto $x=500$ presenta un punto angoloso in quanto risulta

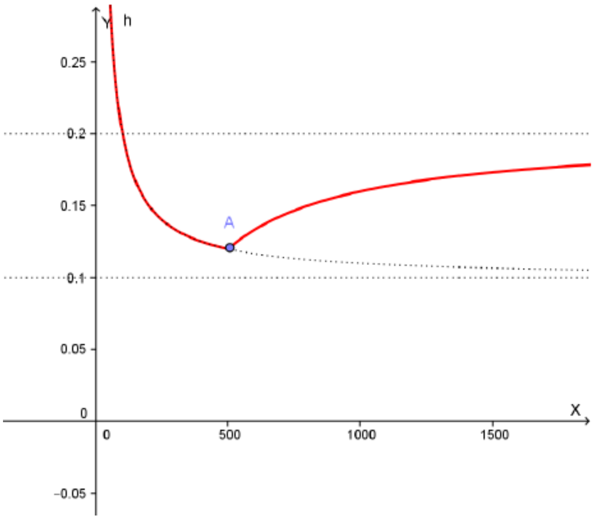
$$g(500-)=\frac{51}{500}\neq g(500+)=\frac{3}{25}$$

tale punto angoloso è anche un punto di minimo assoluto che vale $g(500)=0{,}12\,€$

(3) $x=0$ è un suo asintoto verticale $y=\dfrac{1}{5}$ è un suo asintoto orizzontale

Il grafico di tale funzione è costituito da due rami di iperbole.

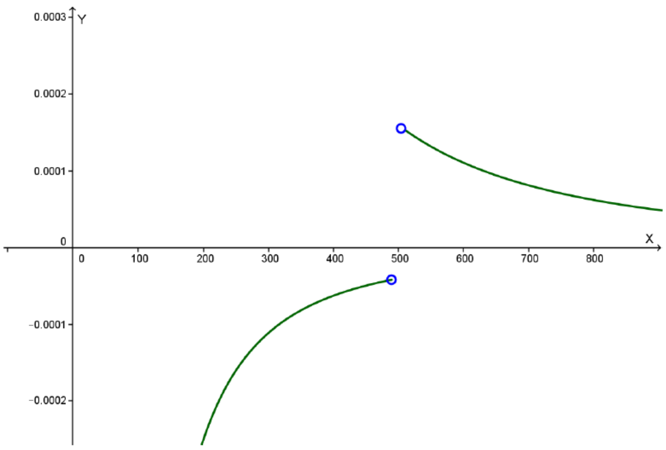




$$g'(x)=\begin{cases}-\dfrac{10}{x^2} & se\ \ 0<x<500\\[2mm] \dfrac{40}{x^2} & se\ \ x>500\end{cases}$$

tale derivata non è continua nel punto $x=500$ che rappresenta una discontinuità di prima specie essendo: $g'(500-)=\dfrac{-1}{25000}\neq g'(500+)=\dfrac{1}{6250}$

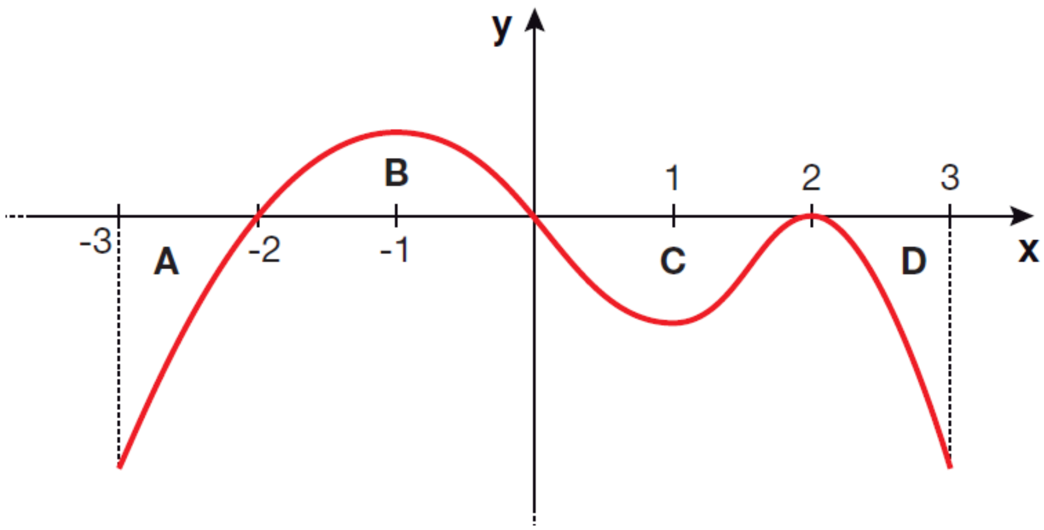
Il grafico della funzione $g'(x)$ è il seguente



Nella nuova situazione il costo medio continua a diminuire all'aumentare di $x\in[0;500]$, mentre aumenta per $x>500$ a causa del sovrapprezzo.

Problema 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3;3]$, il grafico γ, disegnato in figura. γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 2$. Le aree delle ragioni A, B, C e D sono rispettivamente $2, 3, 3$ e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.



(1) Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

(2) Individua i valori di $x \in [-3;3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

(3) Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \to 0} \frac{1 + g(x)}{2x}$

(4) Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x+1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)\,dx$.

(1) Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

Il grafico della funzione $f(x)$ incontra l'asse delle ascisse in 4 punti, dei quali due sono coincidenti in quanto la funzione proposta si annulla nei punti $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=x_4=2$. Se la tangente al grafico della funzione ha nel punto di ascissa $x=2$ un incontro bipunto la funzione polinomiale dovrebbe essere del tipo:

$y=f(x)=x(x+2)(x-2)^2$. In tal caso $f(x)$ dovrebbe essere un polinomio di quarto grado.

Se la tangente al grafico della funzione avesse nel punto di ascissa $x=2$ un incontro almeno tripunto la funzione polinomiale dovrebbe essere del tipo:

$y=f(x)=a(x)\cdot x(x+2)(x-2)^2$ dove $a(x)$ è un polinomio di grado maggiore o uguale ad uno. In tal caso $f(x)$ dovrebbe essere un polinomio come minino di quinto grado.

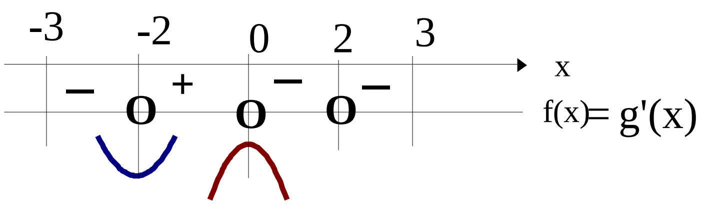
Concludendo possiamo affermare che $f(x)$ è un polinomio almeno di quarto grado.

(2) Individua i valori di $x\in[-3;3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

Poiché $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ risulta: $g'(x)=f(x)$

La monotonia della funzione $g(x)$ dipende dal segno della funzione $f(x)$, segno che deduciamo dal grafico indicato nel testo del problema.

E' utile il seguente schema:



2

$g(x)$ decresce se $-3<x<-2 \quad \vee \quad 0<x<2 \quad \vee \quad 2<x<3$ $\quad g(x)$ decresce se $-2<x<0$

Adesso cerchiamo gli intervalli dove il grafico della funzione $g(x)$ volge la concavità verso l'alto. Il grafico della funzione $g(x)$ volge la concavità verso l'alto negli intervalli dove la sua derivata seconda è positiva. $g'(x)=f(x) \quad \Rightarrow \quad g''(x)=f'(x)$ $g(x)$ volge la concavità verso l'alto se $g''(x)=f'(x)>0$. Questo si verifica negli intervalli dove la funzione $f(x)$ è crescente.

Dal grafico precedente deduciamo che $f(x)$ è crescente negli intervalli $]-3;-1[$ e $]1;2[$

In tali intervalli il grafico della funzione $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

(3) Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+g(x)}{2x}$

Per calcolare $g(0)$ procediamo come segue.

Poiché la regione D ha area 1 ed $f(x)$ è negativa nell'intervallo $]2;3[$, ricordando che $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ e che $g(3)=-5$, risulta:

$$\int_2^3 f(x)\,dx=-1 \quad \Rightarrow \quad \left[g(x)\right]_2^3=-1 \quad \Rightarrow \quad g(3)-g(2)=-1 \quad \Rightarrow \quad g(2)=1+g(3)=1-5=-4$$

Ragionando in modo analogo sui valori noti delle aree e sul segno della funzione $f(x)$ e ricordando che $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ otteniamo per l'area C:

$$\int_0^2 f(x)\,dx=-3 \quad \Rightarrow \quad \left[g(x)\right]_0^2=-3 \quad \Rightarrow \quad g(2)-g(0)=-3 \quad \Rightarrow \quad g(0)=3+g(2)=3-4=-1$$

Ora consideriamo il limite $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+g(x)}{2x}=\dfrac{N(x)}{D(x)}$

$N(0)=1+g(0)=1-1=0 \qquad D(0)=2\cdot 0=0$ Il limite L è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo calcolarlo applicando il teorema di De L'Hospital. Infatti numeratore e denominatore sono funzioni continue e derivabili, con il denominatore non nullo per $x\neq 0$. Il limite L, se esiste, è uguale al limite del rapporto delle derivate di numeratore e denominatore.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1+g(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}=0$$

(4) Sia $h(x)=3\cdot f(2x+1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1}h(x)\,dx$.

Per calcolare l'integrale $\int_{-2}^{1}h(x)\,dx=3\int_{-2}^{3}f(2x+1)\,dx$ effettuiamo il seguente cambiamento di variabili: $2x+1=t \quad dx=\frac{1}{2}dt$

$$x=-2 \;\Rightarrow\; t=-3 \qquad x=1 \;\Rightarrow\; t=3$$

L'integrale proposto diventa: $\mathcal{J}=\int_{-2}^{1}h(x)\,dx=\frac{3}{2}\int_{-3}^{3}f(t)\,dt$

$$\mathcal{J}=\frac{3}{2}\left[\int_{-3}^{-2}f(t)\,dt+\int_{-2}^{0}f(t)\,dt+\int_{0}^{2}f(t)\,dt+\int_{2}^{3}f(t)\,dt\right]$$

$$\mathcal{J}=\int_{-2}^{1}h(x)\,dx=\frac{3}{2}\left[-S(A)+S(B)-S(C)-S(d)\right]=\frac{3}{2}(-2+3-3-1)=-\frac{9}{2}$$

L'integrale proposto vale $-\frac{9}{2}$

E' appena il caso di ruicordare che le funzioni $f(x)$ ed $f(t)$ hanno lo stesso grafico e che $\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{a}^{b}f(t)\,dt$

(1) Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.

$$f'(x) = -2x^2 + 6 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int\left(-2x^2+6\right)dx = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + C$$

$$\gamma: \quad f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + C$$

Imponendo la condizione di tangenza, determiniamo un valore negativo di x tale che si abbia $f'(x) = -2$. $-2x^2 + 6 = -2 \qquad x^2 = 4 \qquad x = \pm 2$

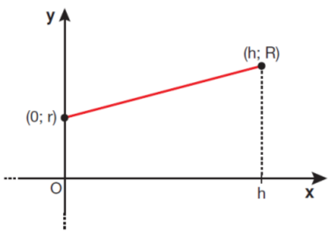
Il valore richiesto è: $x = -2 \qquad y(-2) = (-2)(-2) + 5 = 9 \qquad T(-2;9)$ è il punto di tangenza. $T \in \gamma \quad \Rightarrow \quad 9 = -\frac{2}{3}(-2)^3 + 6(-2) + C \qquad 9 = \frac{16}{3} - 12 + C \qquad C = \frac{43}{3}$

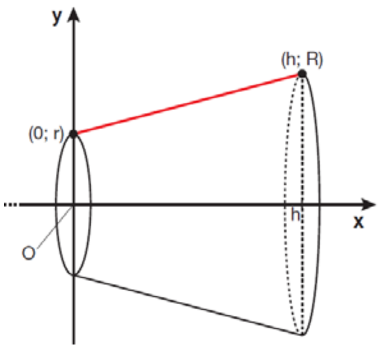
Si conclude affermando che l'espressione analitica della funzione $f(x)$ è:

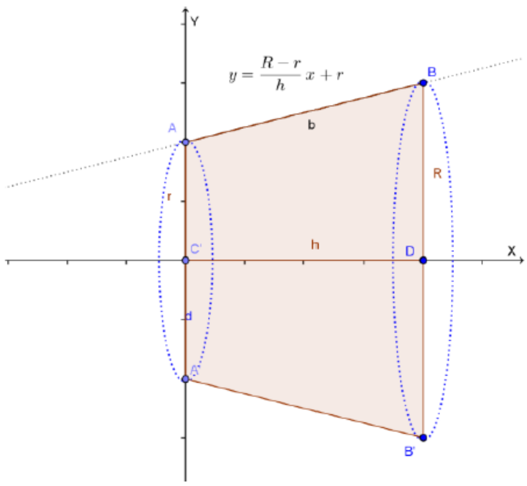
$$\gamma: \quad f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{43}{3}$$

(2) Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$$







Il volume del solido ottenuto dalla rotazione del segmento di estremi $A(0;r)$ e $B(h;R)$ attorno all'asse delle ascisse è il volume del tronco di cono richiesto.

La retta passante per i punti $A(0;r)$ e $B(h;R)$ ha equazione:

$$\frac{y-r}{R-r}=\frac{x}{h} \qquad\qquad y=\frac{R-r}{h}x+1$$

Il volume richiesto si ottiene applicando la seguente formula:

$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2 dx=\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+1\right)^2 dx=\pi\int_0^h\left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2x^2+2r\cdot\frac{R-r}{h}x+r^2\right]dx$$

$$V=\pi\left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{r}{h}(R-r)x^2+r^2x\right]_0^h=\pi\left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2\cdot\frac{h^3}{3}+\frac{r}{h}(R-r)h^2+r^2h\right]$$

$$V=\pi\left[(R-r)^2\cdot\frac{h}{3}+r(R-r)h+r^2h\right]=\pi h\left(\frac{R^2-2Rr+r^2+3Rr-\cancel{3r^2}+\cancel{3r^2}}{3}\right)$$

$$V=\pi h\left(\frac{r^2+Rr+R^2}{3}\right)=\frac{1}{3}\pi h\left(r^2+Rr+R^2\right)$$

Altra dimostrazione

Il volume di un tronco di cono è uguale alla differenza fra il volume del cono di altezza $h+y$ e quello di altezza y.

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli VOA e $VO'A'$ deduciamo:

$$VO:VO'=AO:A'O' \qquad (h+y):y=R:r \qquad \frac{h+y}{y}=\frac{R-r}{r} \qquad \frac{h}{y}+1=\frac{R}{r} \qquad \frac{h}{y}=\frac{R}{r}-1 \qquad \frac{h}{y}=\frac{R-r}{r}$$

$$\frac{y}{h}=\frac{r}{R-r} \qquad y=\frac{hr}{R-r}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2(h+y)-\frac{1}{3}\pi r^2y=\frac{1}{3}\pi\left(R^2h+R^2y-r^2y\right)=\frac{1}{3}\pi\left[R^2h+y\left(R^2-r^2\right)\right]$$

2

$$V=\frac{1}{3}\pi\left[R^2h+\frac{hr}{\cancel{(R-r)}}\cdot(R+r)\cancel{(R-r)}\right]=\frac{1}{3}\pi\left[R^2h+hr\cdot(R+r)\right]\quad V=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right)$$

(3) Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più due volte"? Qual la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

Il lancio di una moneta non truccata ha come possibili esiti testa ($\mathbf{T}$) e croce ($\mathbf{C}$). La probabilità che esca testa (croce) in un singolo lancio è $\frac{1}{2}$, cioè: $p(\mathbf{T})=p(\mathbf{C})=\frac{1}{2}$.

In generale la probabilità che si verifichi un evento è:

$p(E)=\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}=\frac{m}{n}$ se i casi sono tutti equiprobabili.

Calcoliamo la probabilità che escano al più 2 teste, cioè calcoliamo:

$$p(T\le 2)=p(T=0)+p(T=1)+p(T=2)$$

$p(T\le 2)$ = in 6 lanci si abbiano al massimo 2 teste

$p(T=0)$ = in 6 lanci si abbiano 0 teste

$p(T=1)$ = in 6 lanci si abbia 1 teste $p(T=2)$ = in 6 lanci si abbiano 2 teste

Si tratta di una distribuzione binomiale, quindi, indicando con n il numero di prove, con k il numero di "successi", con p la probabilità del "successo" e con q la probabilità dell'insuccesso abbiamo: $p(k,n)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$

Nel nostro caso abbiamo: $n=6$, $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ e quindi possiamo scrivere:

$$p(T=0)=p(0,6)=\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}\quad p(T=1)=p(1,6)=\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=6\cdot\frac{1}{64}=\frac{6}{64}$$

3

$$p(T=2)=p(2,6)=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=15\cdot\frac{1}{64}=\frac{15}{64}$$

$$p(T\le 2)=p(T=0)+p(T=1)+p(T=2)=\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}\approx 0,344=34\%$$

La formula precedente può essere scritta anche nella seguente maniera:

$$p(T\le 2)=\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6+\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\binom{6}{0}\cdot\frac{1}{2^6}+\binom{6}{1}\cdot\binom{6}{2}\frac{1}{2^6}+\cdot\frac{1}{2^6}$$

$$p(T\le 2)=\frac{\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}}{2^6}=\frac{1+6+15}{64}=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}\approx 0,344=34\%$$

Calcoliamo la probabilità che escano almeno 2 teste.

Considero l'evento **F** = escono almeno 2 teste; l'evento contrario è

$\overline{\mathbf{F}}$ = escono 6 croci oppure escono 5 croci ed 1 testa; tale evento è equivalente all'evento non esce alcuna testa oppure esce una sola testa.

$$p(\overline{\mathbf{F}})=p(T=0)+p(T=1)=\frac{1}{64}+\frac{6}{64}=\frac{7}{64}\qquad p(\mathbf{F})=1-p(\overline{\mathbf{F}})=1-\frac{7}{64}=\frac{64-7}{64}=\frac{57}{64}\simeq 0,89$$

Possiamo calcolare la probabilità dell'evento richiesto senza ricorrere all'evento contrario.

$$p(T\ge 2)=p(2\le 6)=p(T=2)+p(T=3)+p(T=4)+p(T=5)+p(T=6)$$

$$p(T\ge 2)=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$p(T\ge 2)=\left[\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}\right]\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}}{2^6}=\frac{57}{64}\simeq 0,89$$

4

(4) Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y=\frac{\ln x}{x}$ è soluzione?

(a) $y''+2\cdot\frac{y'}{x}=y$ **(b)** $y'+x\cdot y''=1$ **(c)** $x\cdot y'=\frac{1}{x}+y$ **(d)** $x^2\cdot y''+x\cdot y'+\frac{2}{x}=y$

$$y(x)=\frac{\ln x}{x} \qquad y'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2} \qquad y''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$$y'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2} \qquad y''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4}=\frac{2x\ln x-3x}{x^4}$$

$$y''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

Sostituiamo nelle varie equazioni differenziali per verificare se $y=\frac{\ln x}{x}$ è soluzione.

(a) Sostituiamo nella prima equazione differenziale $y''+2\cdot\frac{y'}{x}=y$ Otteniamo:

$$\frac{2\ln x-3}{x^3}+2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{\ln x}{x} \qquad \frac{2\ln x-3+2-2\ln x}{x^3}=\frac{\ln x}{x} \qquad -\frac{1}{x^3}\neq\frac{\ln x}{x}$$

La funzione $y=\frac{\ln x}{x}$ non è soluzione della prima equazione differenziale

(b) Sostituiamo nella seconda equazione differenziale $y'+x\cdot y''=1$ Otteniamo:

$$\frac{1-\ln x}{x^2}+x\cdot\frac{2\ln x-3}{x^3}=1 \qquad \frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{2\ln x-3}{x^2}=1 \qquad \frac{1-\ln x+2\ln x-3}{x^2}=1 \qquad \frac{-2+\ln x}{x^2}\neq 1$$

La funzione $y=\frac{\ln x}{x}$ non è soluzione della seconda equazione differenziale

(c) Sostituiamo nella terza equazione differenziale $x\cdot y'=\frac{1}{x}+y$ Otteniamo:

$$x\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x} \qquad \frac{1-\ln x}{x}\neq\frac{1+\ln x}{x}$$

La funzione $y = \frac{\ln x}{x}$ non è soluzione della terza equazione differenziale

(d) Sostituiamo nella quarta equazione differenziale $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$ Otteniamo:

$$x^2 \cdot \frac{2\ln x 3}{x^3} + x \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{\ln x}{x} \qquad \frac{2\ln x - 3}{x} + \frac{1 - \ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{\ln x}{x} \qquad \frac{2\ln x - 3 + 1 - \ln x + 2}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

La funzione $y = \frac{\ln x}{x}$ è soluzione della quarta equazione differenziale $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$

(5) Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

Nello spazio tridimensionale un piano passante per l'origine ha equazione $ax + by + cz = 0$. Per il piano proposto $x + y - z = 0$ abbiamo: $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$.

Il vettore $\vec{v} = (a,b,c) = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ è un vettore perpendicolare al piano di equazione $ax + by + cz = 0$. Questo ci consente di affermare che il vettore $\vec{v} = (1,1,-1) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ è perpendicolare al piano π di equazione $x + y - z = 0$. La retta passante per l'origine degli assi cartesiani è perpendicolare al piano π deve passare per l'origine ed essere parallela al vettore $\vec{v} = (1,1,-1) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Le sue equazioni parametri sono:

$$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = 0 + 1 \cdot t \\ z = 0 - 1 \cdot t \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$ Equazioni parametriche della retta richiesta

L'equazione cartesiana della suddetta retta si ottengono eliminando il parametro t dalle sue equazioni parametriche.

$\begin{cases} x = y \\ y = -z \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ La retta richiesta è l'intersezione di due piano particolari aventi rispettivamente equazioni: $x - y = 0$ $y + z = 0$.

L'equazione di una retta passante per il punto $P_o(x_o; y_o; z_o)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (a, b, c) = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ ha equazione: $\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$

Nel caso nostro abbiamo: $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ e quindi: $x = y = -z$ $\begin{cases} x = y \\ y = -z \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

(6) Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$$

Determinare il minimo di f.

Eseguendo tutti i calcoli, la funzione assume la seguente forma: $f(x) = 5x^2 - 30x + 55$

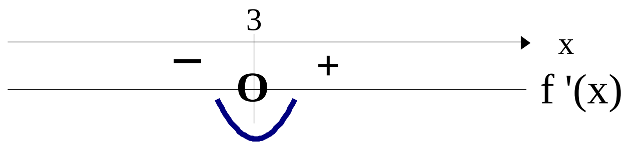
Si tratta di una parabola con la concavità rivolta verso l'alto. Il suo vertice è l'immagine geometrica del minimo assoluto.

$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-30}{10} = 3$ = punto di minimo assoluto $y_V = f(3) = 10$ = minimo assoluto

$V(3;10)$ vertice della parabola.

$$f'(x) = 2\left[(x-1) + (x-2) + (x-3) + (x-4) + (x-5)\right] = 2(5x - 15) = 10(x-3)$$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$ punto di minimo assoluto in quanto $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$



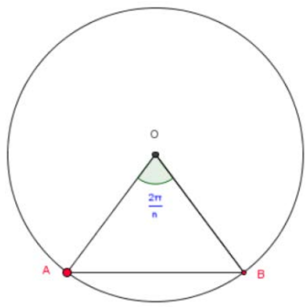
$f(3) = 10$ = minimo assoluto della funzione proposta

(7) Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r, verificare che $A(n)=\frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n\to+\infty$.

Ogni poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r, è composto da n triangoli isosceli congruenti tra loro che hanno:

- la base congruente al lato del poligono regolare
- il lato obliquo congruente al raggio r della circonferenza
- l'angolo al vertice che misura $\frac{2\pi}{n}$

Indicando con O il centro della circonferenza e con AB il lato del poligono regolare inscritto di n lati, l'area $A(n)=S_n$ del poligono si ottiene moltiplicando per n l'area del triangolo isoscele AOB.

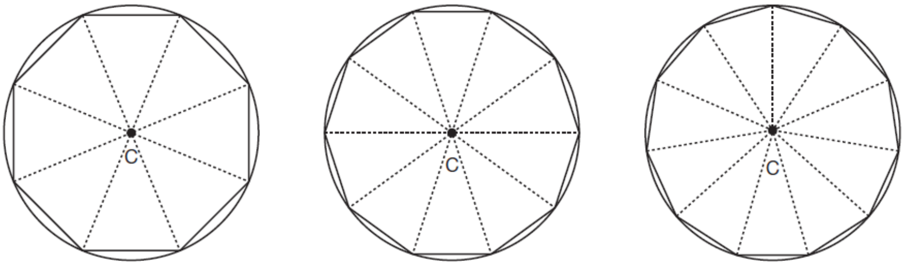


Essendo $A\hat{O}B=\frac{2\pi}{n}$ e ricordando che l'area di un triangolo si può calcolare come il semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, abbiamo:

$S_n=n\cdot S(AOB)=n\cdot\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$ $\quad S_n=\frac{1}{2}n\cdot r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$

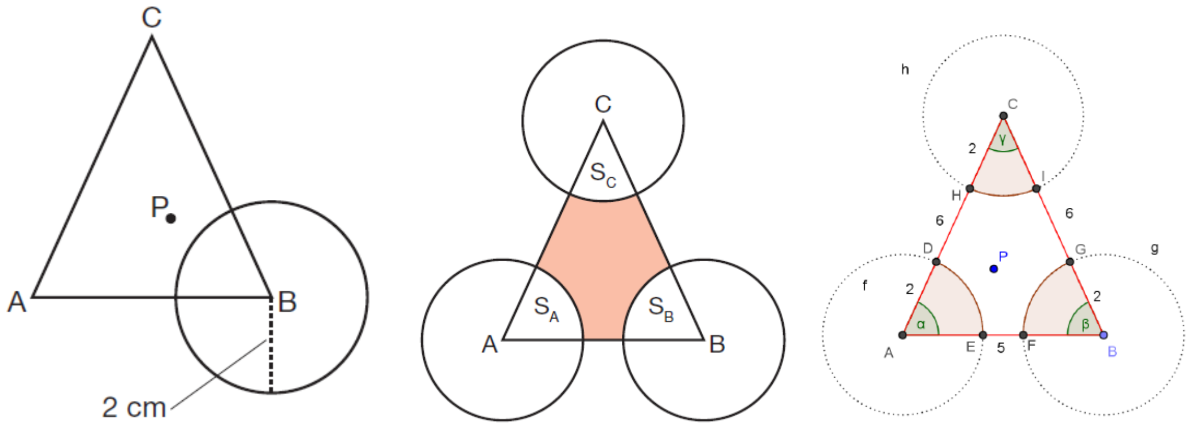
E' così verificato quanto richiesto dal quesito.

Calcoliamo il limite di $A(n)=S_n$ per $n\to+\infty$. Intanto osserviamo che, all'aumentare del numero dei lati, il poligono regolare tende alla circonferenza nella quale è inscritto. E' ragionevole prevedere che il limite per $n\to+\infty$ dell'area $A(n)=S_n$ del poligono regolare inscritto sia l'area del cerchio, cioè è ragionevole prevedere che il risultato del limite proposto sia πr^2.



$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}n\cdot r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}=\pi r^2\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=\pi r^2\cdot 1=\pi r^2$$

(8) I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, $6cm$, $6cm$ e $5cm$. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di $2cm$ da tutti e tre i vertici del triangolo?



Un punto P dista più di $2cm$ da uno dei vertici se non appartiene al cerchio di raggio $2cm$ e centro in quel vertice. I punti interni al triangolo ABC che distano più di $2cm$ da tutti e tre i vertici sono i punti nella parte colorata della figura.

La probabilità richiesta è data dal rapporto tra "l'area favorevole" e "l'area possibile".

La probabilità che un punto P preso a caso all'interno del triangolo disti più di $2cm$ da ciascuno dei vertici è data dal rapporto tra l'area colorata (seconda figura) o l'area non colorata (terza figura) e l'area totale del triangolo ABC.

Calcoliamo l'area della somma dei tre settori circolari S_A, S_B, S_C. I tre settori hanno lo stesso raggio $r = 2cm$ e la somma delle loro ampiezze è uguale alla somma degli angoli interni di un triangolo che è π. Ne deduciamo che l'area della somma dei tre settori circolari è l'area di un semicerchio di raggio $r = 2cm$.

$$S_A + S_B + S_C = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4 = 2\pi\, cm$$

L'area favorevole, cioè l'area colorata della seconda figura, è uguale alla differenza tra l'area del triangolo ABC e l'area della somma dei tre settori circolari.

Calcoliamo l'area del triangolo isoscele ABC. L'altezza h di tale triangolo rispetto alla base AB si ottiene applicando il teorema di Pitagora.

$$h = \sqrt{6^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{36 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{119}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{119}\, cm$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{119} = \frac{5}{4}\sqrt{119}\, cm^2$$

Area favorevole = $S = S(ABC) - (S_A + S_B + S_C) = \left(\frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi\right) cm^2$

La probabilità che un punto P preso a caso all'interno del triangolo ABC disti più di $2cm$ da tutti e tre i vertici è data da:

$$p = \frac{\text{area favorevole}}{\text{area possibile}} = \frac{S}{S(ABC)} = \frac{S(ABC) - (S_A + S_B + S_C)}{S(ABC)} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi}{\frac{5}{4}\sqrt{119}} = 1 - \frac{8\pi}{5\sqrt{119}} \approx 0{,}54 = 54\%$$

(9) Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 & se \quad 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & se \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0;2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi assicura l'esistenza.

Per applicare il teorema di Lagrange si deve verificare quanto segue:

- $f(x)$ deve essere continua su $[0;2]$ • $f(x)$ deve essere derivabile su $]0;2[$

La continuità di $f(x)$ impone che sia: $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) \quad \lim_{x\to 1-} x^3 = \lim_{x\to 1+}\left(x^2 - kx + k\right)$

$$1 = 1$$

La funzione proposta nel punto $x = 1$ è continua $\forall k \in \mathbb{R}$

Cerchiamo ora le condizioni per cui $f(x)$ è derivabile $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & se \;\; 0 \le x \le 1 \\ 2x - k & se \;\; 1 < x \le 2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1+} f'(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1-} 3x^2 = \lim_{x\to 1+}(2x - k) \quad 3 = 2 - k \quad k = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & se \;\; 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & se \;\; 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Per $k = -1$ la funzione proposta è continua nell'intervallo $[0;2]$ e derivabile nell'intervallo $]0;2[$. Le ipotesi del teorema di Lagrange sono soddisfatte. Pertanto esiste almeno un punto $c \in]0;2[$ tale che sia: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c)$

$$\frac{5 - 0}{2 - 0} = f'(c) \quad \frac{5}{2} = f'(c)$$

Per $k = -1$ la derivata $f'(x)$ ha equazione $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & se \;\; 0 \le x \le 1 \\ 2x + 1 & se \;\; 1 < x \le 2 \end{cases}$

Cerchiamo $c \in]0;2[$ tale che sia $\dfrac{5}{2} = f'(c)$. $2c + 1 = \dfrac{5}{2} \quad c = \dfrac{3}{4} \notin]0;2[$

Tale valore non è un punto di Lagrange

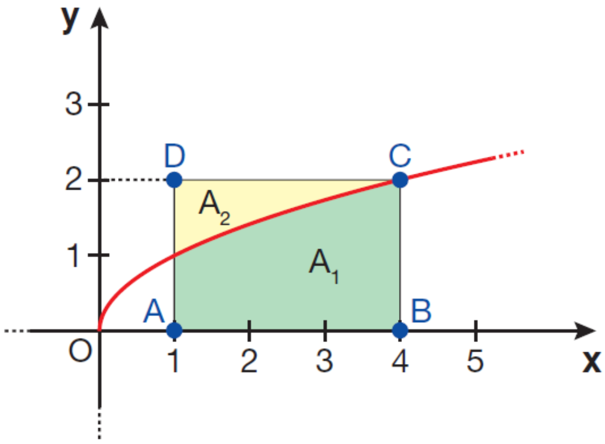
Cerchiamo $c \in]0;1[$ tale che sia $\dfrac{5}{2} = f'(c)$. $3c^2 = \dfrac{5}{2} \quad c^2 = \dfrac{5}{6} \quad c = \pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

$c = -\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ non si accetta in quanto non appartiene all'intervallo $]0;1[$ Quindi $c = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$ è l'unico punto di Lagrange per la funzione proposta.

Il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza è $c = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

(10) Il grafico della funzione $y = \sqrt{x}$ $(x \in \mathbb{R}, x \geq 0)$ divide in due porzioni il rettangolo $ABCD$ avente vertici $A(1;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$ e $D(1,2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

La figura sottostante rappresenta il rettangolo $ABCD$ ed il grafico della funzione $y = \sqrt{x}$.



Sia A_1 l'area della porzione di rettangolo sottostante il grafico della funzione proposta

$$A_1 = \int_1^4 \sqrt{x}\, d\,x = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\, d\,x = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{2}{3}(8-1) \qquad A_1 = \frac{14}{3}$$

$S(ABCD) = 3 \cdot 2 = 6$ = area del rattangolo $ABCD$

Sia A_2 l'area della porzione di rettangolo sovrastante il grafico della funzione proposta. Risulta: $A_2 = S - A_1 = 6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}$

Il rapporto tra le due aree è: $r = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{2}$