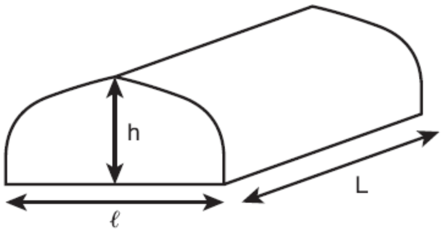
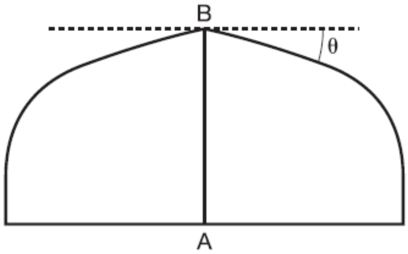
L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettarne uno che risponda alle esigenze del condominio.



■ Figura 1

■ Figura 2



Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;
- la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;
- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\theta \geq 10°$;

- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;
- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1; 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}, \qquad f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1, \qquad f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right).$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo θ e al volume del serbatoio.

3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione delal funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1;1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1-|x|)^{\frac{1}{k}}, \qquad f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1, \qquad f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right).$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ ed al volume del serbatoio.

Scegliamo come riferimento cartesiano quello che ha come origine il punto $A(0;0)$, come asse x la retta orizzontale passante per $A(0;0)$ orientata da sinistra verso destra, come asse y la retta passante per $A(0;0)$, perpendicolare all'asse x, ed orientata verso l'alto.

Risulta: $B(0;1)$ La curva profilo interseca l'asse x nei punti $(-1;0)$, $(1;0)$

Le tre funzioni proposte sono tutte simmetriche rispetto all'asse y in quanto risulta $f(-x)=f(x)$.

Affinchè una funzione proposta descriva il profilo laterale del serbatoio deve risultare:

$$f(0)=1 \qquad f(\pm 1)=0 \qquad f'_-(0) \geq \mathrm{tg}\,10° \qquad f'_+(0) \leq -\,\mathrm{tg}\,10°$$

Per la simmetria del profilo possiamo studiare ciascuna funzione nell'intervallo $[0;1]$

(1) Prima funzione: $f(x)=(1-|x|)^{\frac{1}{k}}$ che, nell'intervallo $[0;1]$ diventa: $f(x)=(1-x)^{\frac{1}{k}}$

Per questa funzione abbiamo: $f(\mathbf{0})=\mathbf{1}$ $\quad f(\mathbf{1})=\mathbf{0}$ $\quad f'(x)=-\dfrac{1}{k}(1-x)^{\frac{1}{k}-1}$ $\quad f'_+(0)=-\dfrac{1}{k}\cdot 1^{\frac{1}{k}-1}=-\dfrac{1}{k}$

$f'_+(\mathbf{0})\le \textbf{- tg}\,\mathbf{10°} \;\Rightarrow\; -\dfrac{1}{k}\le -0{,}176 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{k}\ge 0{,}176 \;\Rightarrow\; k\le \dfrac{1}{0{,}176} \;\Rightarrow\; k\le 5{,}68$

Basta scegliere $k=1 \vee k=2 \vee k=3 \vee k=4 \vee k=5$ perché la funzione $f(x)=\left(1-|x|\right)^{\frac{1}{k}}$ descriva il profilo del serbatoio.

(2) Seconda funzione $f(x)=-6|x|^3+9kx^2-4|x|+1$ che, nell'intervallo $[0;1]$ diventa:

$$f(x)=-6x^3+9kx^2-4x+1$$

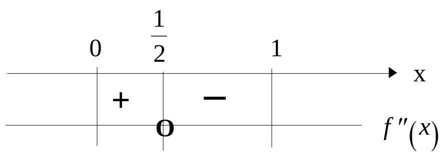
Per questa funzione abbiamo: $f(\mathbf{0})=\mathbf{1}$ $\quad f(1)=-6+9k-4+1=9k-9=0$ se $k=1$

$f'_+(x)=-18x^2+18k\,x-4$ che per $k=1$ diventa: $f'_+(x)=-18x^2+18x-4$

$f'_+(0)=-4$ $\quad f'_+(\mathbf{0})\le \textbf{- tg}\,\mathbf{10°} \;\Rightarrow\; -4\le -0{,}176$ disuguaglianza vera

$f''_+(x)=-36x+18$ $\quad f''_+(x)=0 \;\Rightarrow\; -36x+10=0 \;\Rightarrow$

$x=\dfrac{1}{2}$ punto di flesso discendente



La funzione $f(x)=-6x^3+9kx^2-4x+1$ volge la concavità verso l'**alto** (il **basso**) se $0<x<\dfrac{1}{2}$

(se $\dfrac{1}{2}<x<1$)

Questo risultato ci induce ad affermare che la funzione $f(x)=-6|x|^3+9kx^2-4|x|+1$ non può descrivere il profilo del serbatoio.

(3) Terza funzione $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x^k\right)$ $\quad f(0)=\cos 0=1$ $\quad f(1)=\cos\dfrac{\pi}{2}=1$

$f'(x)=-\dfrac{\pi}{2}k\,x^{k-1}\sin\dfrac{\pi}{2}x^k$ $\quad f'_+(0)=0$ e $f'_+(\mathbf{0})\le \textbf{- tg}\,\mathbf{10°} \;\Rightarrow\; 0\le -0{,}176$ disuguaglianza falsa

La funzione $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x^k\right)$ non può descrivere il profilo del serbatoio.

Concludendo possiamo affermare che $f(x)=(1-|x|)^{\frac{1}{k}}$ con $k=1,2,3,4,5$ è la sola funzione che descrive il profilo del serbatoio.

Imponiamo che il volume **V** del serbatoio sia ≥ 13. Tale volume si ottiene moltiplicando l'area della sezione **S** trasversale per la lunghezza **L** del serbatoio.

$$V=8\cdot S=8\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=8\int_{-1}^{1}(1-|x|)^{\frac{1}{k}}\,dx=8\cdot 2\int_{0}^{1}(1-x)^{\frac{1}{k}}\,dx=-16\int_{0}^{1}(1-x)^{\frac{1}{k}}\,d(1-x)$$

$$\mathbf{V}=-16\left[\frac{(1-x)^{\frac{1}{k}+1}}{\frac{1}{k}+1}\right]_0^1=-16\left[-\frac{1}{\frac{1}{k}+1}\right]=\frac{\mathbf{16k}}{\mathbf{k+1}}$$

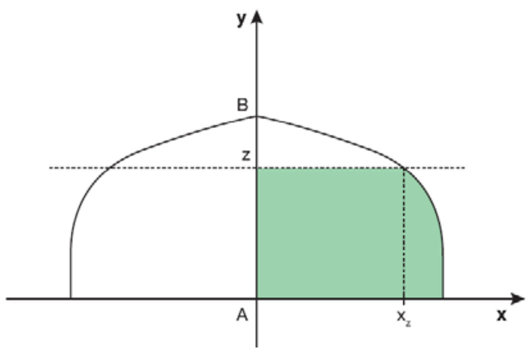
$$V\geq 13 \quad\Rightarrow\quad \frac{16k}{k+1}\geq 13 \quad\Rightarrow\quad 16k\geq 13k+13 \quad\Rightarrow\quad k\geq\frac{13}{3}\simeq 4,3$$

Per la limitazione del parametro possiamo scegliere $\mathbf{k=5}$ $\quad V(5)=\frac{16\cdot 5}{5+4}=\frac{80}{6}=\frac{40}{3}\simeq 13,3$

Il volume del serbatoio, il cui profilo è realizzato dalla funzione $f(x)=(1-|x|)^{\frac{1}{k}}$, ha volume maggiore dei $13m^3$, come richiesto dal problema.

3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione delal funzione $\mathbf{V(z)}$ che associa al livello $\mathbf{z}$ del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento $\mathbf{V}$ del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Sia z il livello del gasolio presente nel serbatoio. La retta di equazione $y=z$ incontra il profilo verticale del serbatoio nel punto di ascissa $x(z)$ del primo quadrante. Il suo valore, ricordando che $k=5$, lo otteniamo risolvendo il seguente sistema.



$$\begin{cases} y=z \\ y=f(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} y=z \\ y=(1-x)^{\frac{1}{5}} \end{cases} \qquad z=(1-x)^{\frac{1}{5}} \qquad z^5=1-x \qquad x(z)=1-z^5 \quad \text{con} \quad 0\leq z\leq 1$$

Sotto queste condizioni il volume del gasolio presente nel serbatoio, quando l'indicatore segnala il livello z, è il seguente:

$V(z)=2\left[x(z)\cdot z+\int_{x(z)}^{1}(1-x)^{\frac{1}{5}}\,dx\right]$ dove $2x(z)\cdot z$ rappresenta l'area della sezione rettangolare del serbatoio parallela alla base $\int(1-x)^{\frac{1}{5}}\,dx=-\int(1-x)^{\frac{1}{5}}\,d(1-x)=-\frac{5}{6}(1-x)^{\frac{6}{5}}+K$

$$V(z)=2\left[\left(1-z^5\right)\cdot z+\int_{1-z^5}^{1}(1-x)^{\frac{1}{5}}\,dx\right]\cdot L=16\left\{z-z^6-\frac{5}{6}\left[(1-x)^{\frac{6}{5}}\right]_{1-z^5}^{1}\right\}$$

$$V(z)=16\left\{z-z^6-\frac{5}{6}\left[0-\left(\cancel{1}-\cancel{1}+z^5\right)^{\frac{6}{5}}\right]\right\}=16\left[z-z^6+\frac{5}{6}z^6\right]=16z-\frac{8}{3}z^6 \quad \mathbf{V(z)=16z-\frac{8}{3}z^6}$$

La percentuale del volume pieno di gasolio, quando il suo livello è a quota $\mathbf{z}$, ci viene fornita dalla seguente formula: $\mathbf{P(z)}=\frac{V(z)}{V}\cdot 100=\frac{16z-\frac{8}{3}z^6}{\frac{4}{3}}\cdot 100=\mathbf{120z-20z^6}$

Quando il livello del gasolio presente nel serbatoio occupa il livello $\mathbf{z=50\,cm=0,5\,m=\frac{1}{2}m}$ l'indicatore segnerà una percentuale di riempimento pari a:

$$P(0,5)=120\cdot\frac{1}{2}-20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=60-\frac{20}{64}=\frac{955}{16}\simeq 59,6875\%\simeq 59,7\%$$

L'errore commesso dall'amministratore è dovuto al fatto che non c'è proporzionalità diretta fra il livello $\mathbf{z}$ individuato dall'indicatore e la percentuale di gasolio presente nel serbatoio. Infatti il profilo curvo ci dice che il serbatoio è più capiente nella parte bassa rispetto a quella più alta. L'errore dell'amministratore consiste nell'ammettere che la percentuale di riempimento va calcolata con la formula $\mathbf{P_a(z)}=\frac{z}{1}\cdot 100=\mathbf{100z}$ formula che esprime la proporzionalità diretta fra il livello $\mathbf{z}$ individuato dall'indicatore e la percentuale di gasolio presente nel serbatoio.

Tale formula sarebbe valida se il recipiente fosse un parallelepipedo rettangolo o un cilindro.

In uno di questi due casi $z=\frac{1}{2}$ darebbe $\mathbf{P_a\left(\frac{1}{2}\right)=100\cdot\frac{1}{2}=50\%}$

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

La differenza tra le due percentuali è:

$$d(x)=P(z)-P_a(z)=120z-20z^6-100z=-20z^6+20z \quad \text{con} \quad 0\le z\le 1$$

$d(0)=d(1)=0$ questo risultato ci dice che le due percentuali coincidono soltanto a serbatoio vuoto e a serbatoio pieno.

Cerchiamo il massimo della funzione $d(x)=-20z^6+20z$ con $0\le z\le 1$

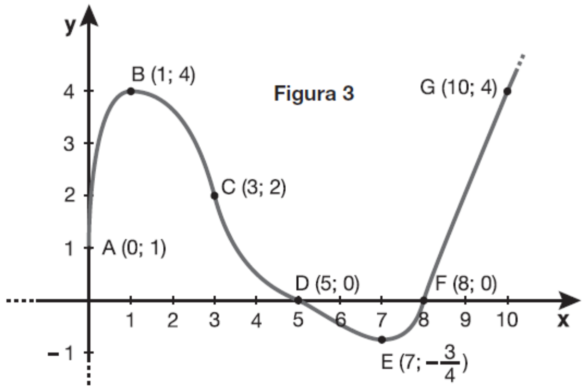
$$d'(z)=-120z^5+20 \quad d'(z)=0 \quad \Rightarrow \quad -120z^5+20=0 \quad z^5=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

$z=\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}\simeq 0,7\,m$ = punto di massimo assoluto in quanto risulta: $d''(z)=-600z^4<0 \;\; \forall z\in[0;1]$

$$d(0,7)=-20(0,7)^6+20\cdot 0,7\simeq 11,65\%$$

L'errore percentuale massimo che si commette è pari a circa $11,65\%$ e si verifica quando l'indicatore segnala che il livello z del gasolio è di circa $0,7\,m$.

Nella figura 3 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f:[0;+\infty[\rightarrow\mathbb{R}$, derivabile in $[0;+\infty[$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.



È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x+y-8=0$.
Nel punto D la retta tangente ha equazione $x+2y-5=0$ e per $x\geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y=f'(x), \qquad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y=|f'(x)|, \qquad y=|f(x)|', \qquad y=\frac{1}{f(x)},$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y=f(x)$ e di $y=|f(x)|$ nell'intervallo $[0;8]$, il valore medio di $y=f'(x)$ nell'intervallo $[1;7]$ e il valore medio di $y=F(x)$ nell'intervallo $[9;10]$.

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

Il problema da risolvere è il seguente: dal grafico della funzione $f(x)$ dedurre il grafico delle funzioni $y=f'(x)$ $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

Pongo: $f'(x)=g(x)$, deduco: $g'(x)=f''(x)$

Per $x\geq 8$ il grafico Γ coincide con la retta FG di equazione $\frac{x-x_F}{x_G-x_f}=\frac{y-y_F}{y_G-y_F}$ $\frac{x-8}{2}=\frac{y}{4}$

$$\mathbf{y=2x-16}$$

Le caratteristiche del grafico della funzione $g(x)=f'(x)$ sono le seguenti:

- $f'(0)=+\infty$ cioè $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=+\infty$ in quanto il grafico della funzione $f(x)$ è tangente all'asse delle ordinate nel punto $A(0;1)$.

- $f'(1)=0$ $f'(7)=0$ in quanto B ed E sono punti stazionari per la funzione $f(x)$

- La monotonia della funzione $g(x)=f'(x)$ dipende dal segno della sua derivata, cioè dal segno di $g'(x)=f''(x)$.

La funzione $f'(x)$ cresce (decresce) quando la sua derivata $f''(x)$ è positiva (negativa). Il segno di $f''(x)$ lo possiamo dedurre dalla concavità del grafico Γ.

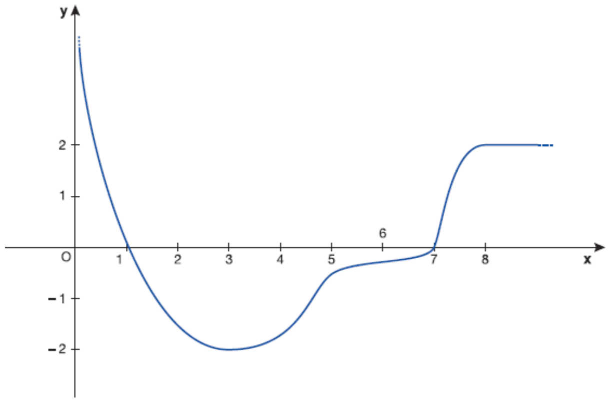
$f''(x)<0$ se $0<x<3$ ($f'(x)$ decresce) $f''(x)>0$ se $3<x<8$ ($f'(x)$ cresce)

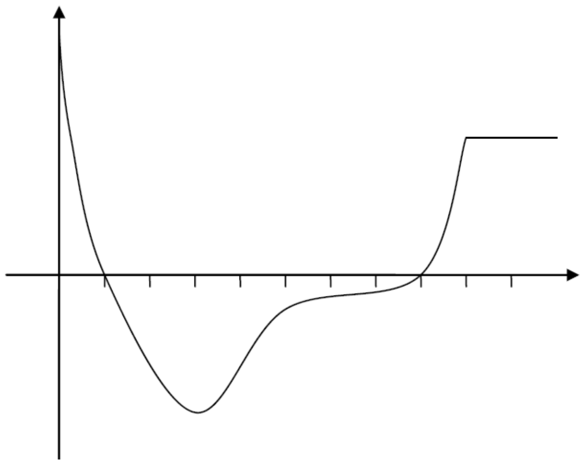
$f''(x)=2$ e $x>8$ (coefficiente angolare della retta FG di equazione $\mathbf{y=2x-16}$)

- $f'(5)=-\frac{1}{2}$ in quanto la retta $x+2y-5=0$ ($y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$) è tangente a Γ nel punto $D(5;0)$

- $f'(3)=-2$ in quanto la retta $2x+y-8=0$ ($y=-2x+8$) è tangente a Γ nel punto $C(3;2)$

Il grafico richiesto è quello indicato in figura:





Studio della funzione $y=F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Questa funzione rappresenta l'area del trapezoide individuato dalla funzione $f(x)$ e relativo all'intervallo $[0;x]$

$F(5)=\int_0^5 f(t)\,dt=11 \quad F(8)=\int_0^5 f(t)\,dt+\int_5^8 f(t)\,dt=11-1=10$

$F'(x)=f(x) \quad F''(x)=f'(x) \quad \Rightarrow \quad F''(x)>0$ se $0<x<1 \vee x>7$ (in tali intervalli il grafico della funzione $F(x)$ volge la concavità verso l'alto)

$F''(x)<0$ se $1<x7$ (in tali intervalli il grafico della funzione $F(x)$ volge la concavità verso il basso)

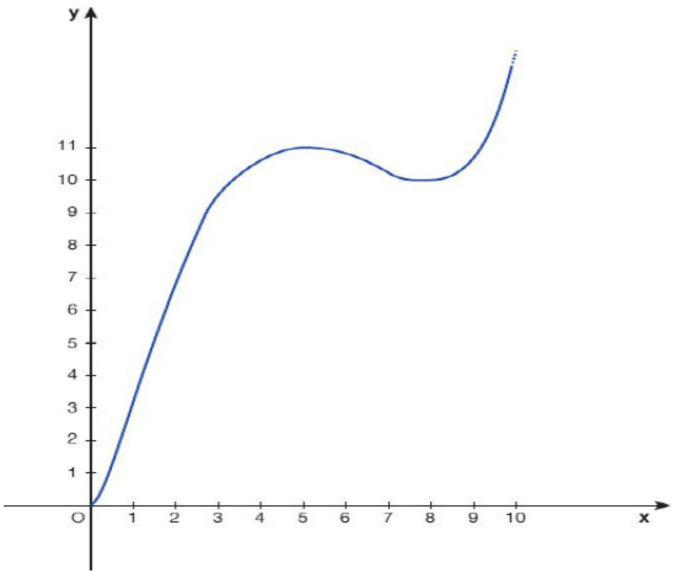
Questo ci consente di affermare che nei punti $x=1$ e $x=7$ la funzione $F(x)$ presenta due punti di flesso in quanto si ha il cambiamento della concavità del suo grafico.

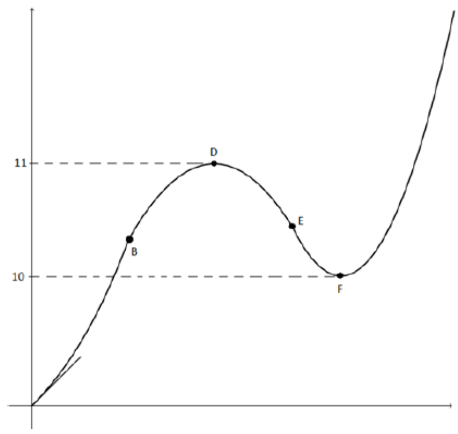
Troviamo l'espressione analitica della funzione $y=F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ per $x>8$

$$y=F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^8 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt=10+\int_0^x (2t-16)\,dt=10+\left[t^2-16t\right]_8^x$$

$$\mathbf{F(x)=x^2-16x+74} \quad \text{se} \quad x>8$$

La funzione $y=F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ presenta un punto di **massimo relativo** per $x=5$. $D(5;0)$ è la sua immagine geometrica; presenta un punto di **minimo relativo** per $x=8$. $F(8;0)$ è la sua immagine geometrica; presenta due flessi nei punti $B(1;4)$, $E\left(7;-\frac{3}{4}\right)$





2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

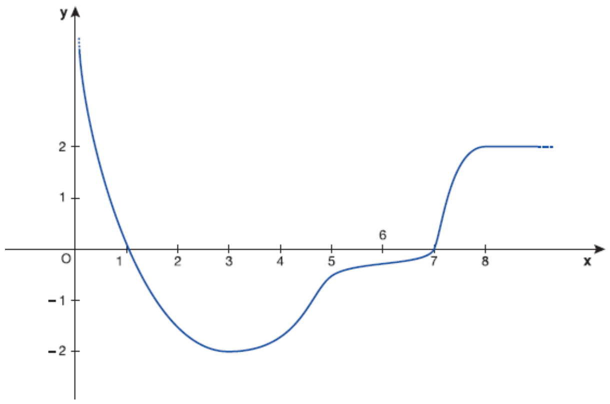
$$y=\left|f'(x)\right|,\quad y=\left|f(x)\right|',\quad y=\frac{1}{f(x)}$$

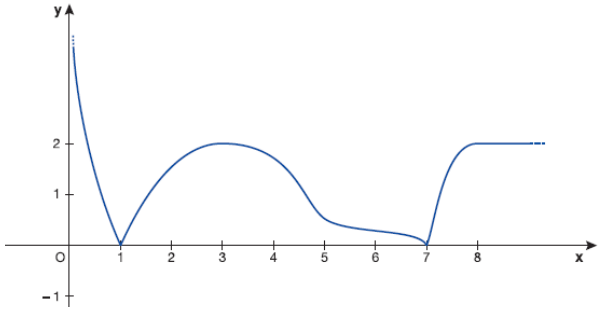
Specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

$$dom\, f(x)=[0;+\infty[\qquad dom\left|f'(x)\right|=]0,+\infty[\qquad dom\left|f(x)\right|'=]0,+\infty[$$

Il grafico della funzione $\left|f(x)\right|$ si ottiene dal grafico γ della funzione $f(x)$ sostituendo la parte situata nel semipiano delle y negative con il simmetrico di γ rispetto all'asse y. Con parole diverse possiamo dire che il grafico della funzione $\left|f(x)\right|$ è l'unione del grafico γ della funzione $f(x)$ negli intervalli dove risulta $f(x)>0$ e del simmetrico rispetto all'asse delle x del grafico γ della funzione $f(x)$ negli intervalli dove risulta $f(x)<0$.

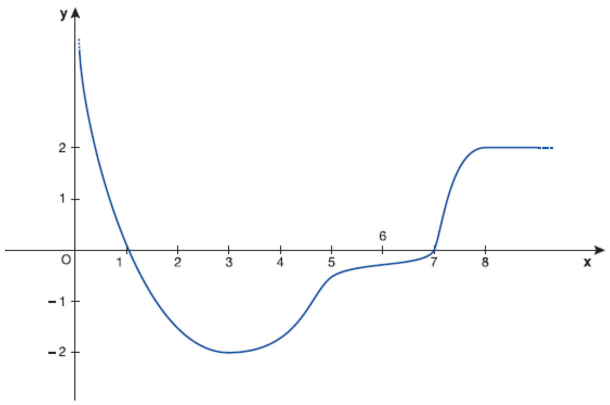
Pertanto il grafico della funzione $\left|f'(x)\right|$ è il seguente:

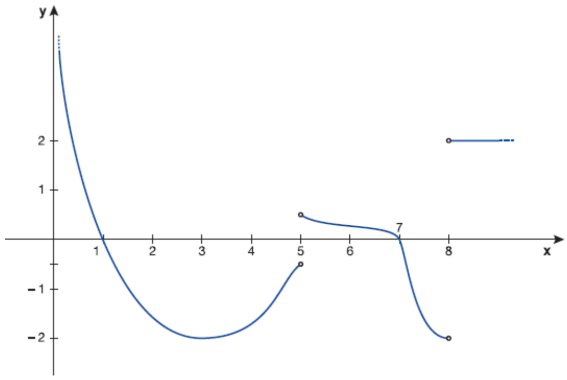




$$y=\left|f(x)\right|'=\begin{cases} f'(x) \ \ se \ \ f(x)>0 \ \ cioè \ se \ 0<x<5 \ \vee \ x>8 \\ f'(x) \ \ se \ \ f(x)<0 \ \ cioè \ se \ 5<x<8 \end{cases}$$

$dom\left|f(x)\right|'=]0;+\infty[-\{5,8\}$ in quando risulta $\lim_{x\to5-} f(x)\neq\lim_{x\to5+} f'(x)$ e $\lim_{x\to8-} f(x)\neq\lim_{x\to8+} f'(x)$ come risulta dai rispettivi grafici. Il grafico richiesto è quello indicato in figura.





$$y=\frac{1}{f(x)} \ \Rightarrow \ A'(0;1) \ \text{con} \ x_{A'}=x_A \ \ y_{A'}=\frac{1}{y_A} \ \ B'\left(1;\frac{1}{4}\right) \ \ x_{B'}=x_B \ \ y_{B'}=\frac{1}{y_B}$$

$$C'\left(3;\frac{1}{2}\right) \ \text{con} \ x_{C'}=x_C \ \ y_{C'}=\frac{1}{y_C} \ \ E'\left(7;-\frac{1}{4}\right) \ \text{con} \ x_{E'}=x_E \ \ y_{E'}=\frac{1}{y_E}$$

$$G'\left(10;\frac{1}{4}\right) \ \text{con} \ x_{G'}=x_G \ \ y_{A'}=\frac{1}{y_A}$$

$$\frac{1}{f(x)}>0 \ \ se \ \ f(x)>0 \qquad \frac{1}{f(x)}<0 \ \ se \ \ f(x)<0$$

$$\lim_{x\to5\pm}\frac{1}{f(x)}=\mp\infty \ \Rightarrow \ x=5 \ \text{ asintoto verticale completo}$$

$$\lim_{x\to 8^{\pm}}\frac{1}{f(x)}=\pm\infty \quad\Rightarrow\quad x=8 \quad \text{asintoto verticale completo}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{f(x)}=0 \quad\Rightarrow\quad y=0 \quad \text{Asintoto orizzontale destro}$$

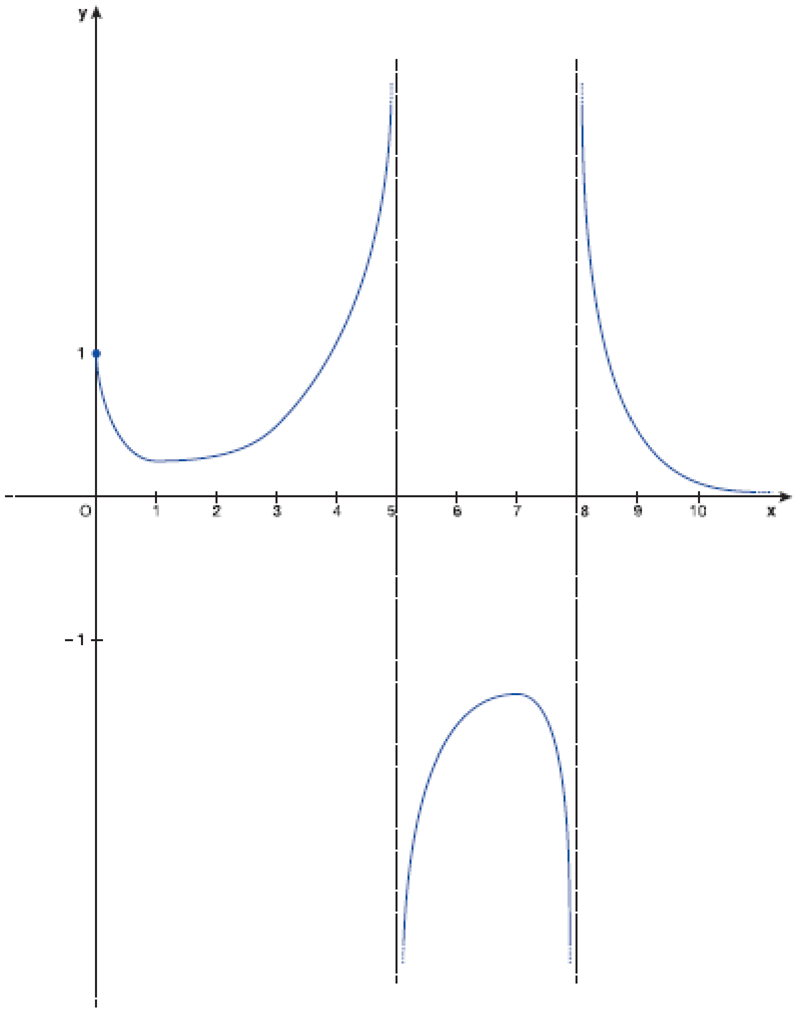
Nell'intervallo $]0;5[$ $B'\left(1;\frac{1}{4}\right)$ è l'immagine geometrica di un punto di minimo relativo

Nell'intervallo $]5;8[$ $E'\left(7;-\frac{1}{4}\right)$ è l'immagine geometrica di un punto di massimo relativo

Per $x\geq 8$ l'espressione analitica della funzione $y=\frac{1}{f(x)}$ diventa $\mathbf{y=\frac{1}{2x-16}}$

Si tratta di una parte dell'iperbole equilatera i cui assi hanno, rispettivamente, equazioni $y=0$ e $x=8$.

Il grafico della funzione richiesta è il seguente:



3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo [0; 8], il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo [1; 7] e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo [9; 10].

Per calcolare il valore medio della funzione $y=f(x)$ nell'intervallo $[a;b]$ bisogna applicare la formula $y_m = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

Il valore medio della funzione $y=f(x)$ nell'intervallo $[0;8]$ è il seguente:

$$y_m = \frac{\int_0^8 f(x)\,dx}{8} = \frac{\int_0^5 f(t)\,dt + \int_5^8 f(t)\,dt}{8} = \frac{11-1}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Il valore medio della funzione $y=|f(x)|$ nell'intervallo $[0;8]$ è il seguente:

$$y_m = \frac{\int_0^8 |f(x)|\,dx}{8} = \frac{\int_0^5 f(t)\,dt + \int_5^8 |f(t)|\,dt}{8} = \frac{11+1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Il valore medio della funzione $y = f'(x)$ nell'intervallo $[1;7]$ è il seguente:

$$y = \frac{\int_1^7 f'(x)\,dx}{7-1} = \frac{f(7)-f(1)}{6} = \frac{-\frac{3}{4}-4}{6} = -\frac{19}{24}$$

$f(7)$ = ordinata del punto $E\left(7;-\frac{3}{4}\right)$

$f(1)$ = ordinata del punto $B(1;4)$

Il valore medio della funzione $y = F(x)\ x^2 - 6x + 4$ nell'intervallo $[9;10]$ è il seguente:

$$y_m = \frac{\int_9^{10}\left(x^2 - 16x + 74\right)dx}{10\ -\ 9}\left[\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 74x\right]_9^{10} = \frac{1000}{3} - 800 + 740 - 243 + 648 - 666 = \frac{37}{3}$$

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

La retta tangente al grafico della funzione $y = F(x)$ nel punto $(0;0)$ è:

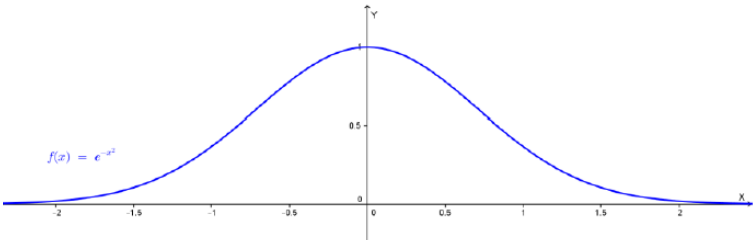
$y = F'(0)\cdot x \quad y = 1\cdot x \quad \mathbf{y = x}$

La retta tangente al grafico della funzione $y = F(x)$ nel punto $F(8;10)$ è $\mathbf{y = 10}$ in quanto il punto $F(8;10)$ è l'immagine geometrica di un punto di minimo relativo.

Quesito N°1

E' noto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$. Stabilire se il numero reale u, tale che $\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\,dx=1$ è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte: $A=\int_{-u}^{u} x^7\cdot e^{-x^2}\,dx$ $\quad B=\int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx$ $\quad C=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}\,dx$

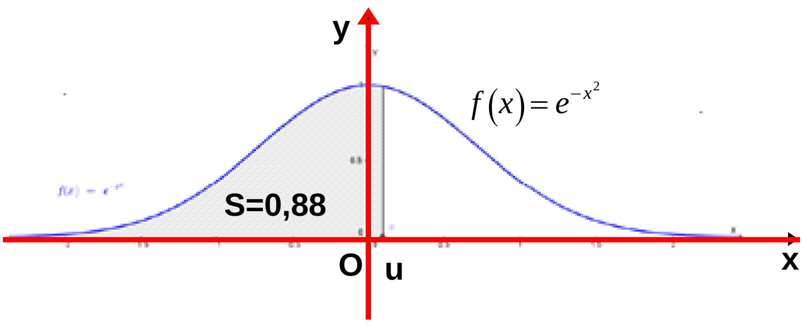
La funzione $f(x)=e^{-x^2}$ è pari, positiva ed il suo grafico, simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, è quello indicato in figura.



$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ è uguale all'area della superficie compresa tra il grafico di $f(x)=e^{-x^2}$ e l'asse delle ascisse.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi} \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=2\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sim 0{,}88<1$$

$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx\sim 0{,}88<1 \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\,dx=1$ solo se **u** è maggiore di zero, come si deduce osservando il seguente grafico.



$A=\int_{-u}^{u} x^7\cdot e^{-x^2}\,dx=0$ in quanto la funzione $g(x)=x^7\cdot e^{-x^2}$ è dispari ed il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani. Ciò ci consente di dedurre che: $\int_{-u}^{0} x^7\cdot e^{-x^2}\,dx=-\int_{0}^{u} x^7\cdot e^{-x^2}\,dx$.

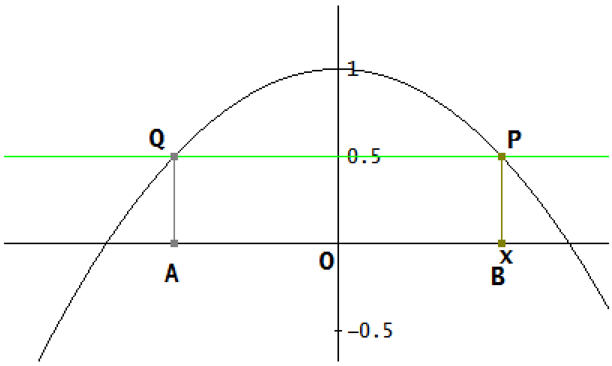
$$B=\int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx=2\int_{0}^{u} e^{-x^2}\,dx=2\left[\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\,dx-\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx\right]=2\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=2-\sqrt{\pi}$$

Per calcolare l'integrale $C=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}\,dx$ introduco l'incognita ausiliare $y=x\sqrt{5}$ $\quad dy=\sqrt{5}\,dx$

$$dx=\frac{1}{\sqrt{5}}dy \quad C=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{\pi}{5}}$$

Quesito N°2

Data una parabola di equazione $y=1-ax^2$, con $a>0$ si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x, nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo che il rettangolo di area massima sia anche rettangolo di perimetro minimo.

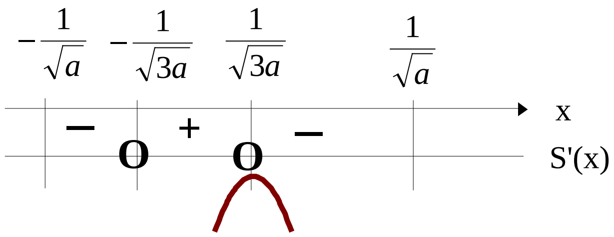


La parabola ha equazione $y=1-ax^2$. Sia $ABPQ$ un rettangolo inscritto nella parabola con il lato AB sull'asse delle ascisse. $V(0,1)$ vertice della parabola la quale incontra l'asse delle ascisse nei punti $\left(\frac{1}{\sqrt{a}},0\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},0\right)$.

Sia $P\left(x,1-ax^2\right)$ un punto della parabola appartenente al primo quadrante. $0\le x\le\frac{1}{\sqrt{a}}$

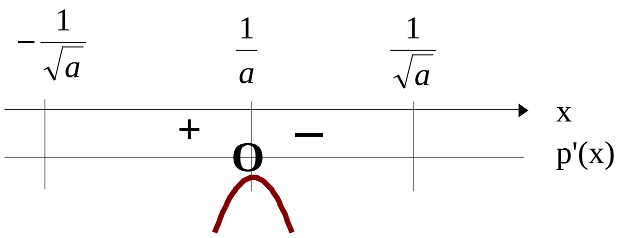
$$S\left(ABPQ\right)=2\cdot OB\cdot BP=2x(1-ax^2)=S\left(x\right) \quad S'\left(x\right)=2\left(1-3ax^2\right) \quad S'\left(x\right)=0 \;\Rightarrow\; 2\left(1-3ax^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\; x=\pm\frac{1}{\sqrt{3a}} \quad x=\frac{1}{\sqrt{3a}}$$ punto di massimo assoluto



$$p(ABPQ) = p(x) = 4OB + 2BP = 2(2OB + BP) = 2\left(2x + 1 - ax^2\right) = 2\left(-ax^2 + 2x + 1\right)$$

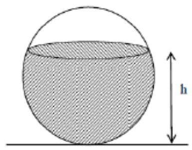
$p'(x) = 4(1 - ax) \quad p'(x) = 0 \quad 4(1 - ax) = 0 \quad x = \frac{1}{a}$ punto di massimo assoluto



$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{3a}} \quad a = 3$ Per $a = 3$ il rettangolo $ABPQ$, inscritto nella parabola di equazione $y = 1 - ax^2$ ha perimetro ed area massima.

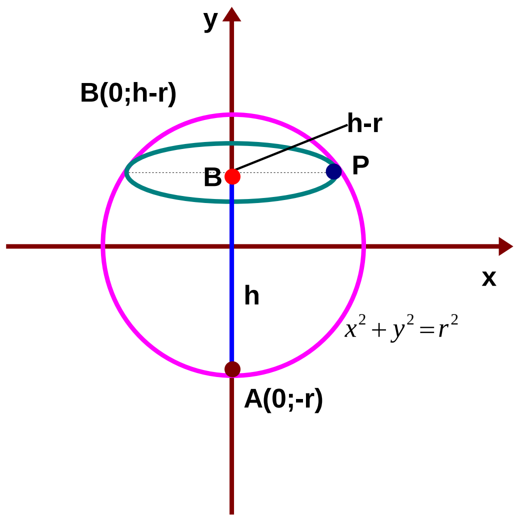
Quesito 3

3. Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h. Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da: $V = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right)$.



Il volume occupato dal liquido nel recipiente corrisponde al volume della calotta sferica ottenuta dalla rotazione completa dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ attorno all'asse y.

$x^2 + y^2 = r^2$ è l'equazione della circonferenza di centro O e raggio r



$x = g(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$ è l'equazione dell'arco $\overset{\frown}{AB}$

$$V = \pi \int_{-r}^{h-r} \left[g(y)\right]^2 dy = \pi \int_{-r}^{h-r} \left(r^2 - y^2\right) dy = \pi \left[r^2 y - \frac{1}{3} y^3\right]_{-r}^{h-r} = \pi \left[r^2 (h - r) - \frac{1}{3}(h - r)^3 + r^3 - \frac{1}{3} r^3\right]$$

$$V=\pi\left(\cancel{r^2h}-\cancel{r^3}-\frac{1}{3}h^3+\cancel{\frac{1}{3}r^3}+h^2r-\cancel{hr^2}+\cancel{r^3}-\cancel{\frac{1}{3}r^3}\right)=\pi\left(h^2r-\frac{1}{3}h^2\right)$$

Quesito 4

Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui una sola è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

Indichiamo con X la variabile aleatoria definita come il numero di domande tra le 10 proposte alle quali si risponde correttamente. la variabile aleatoria X come il numero di successi su 10 prove ciascuna delle quali ha probabilità di successo $p=\frac{1}{4}=0,25$ e probabilità di insuccesso $q=1-p=\frac{3}{4}$. $k=8,9,10$ $\quad p_{n,k}(X\geq 8)=p_{10,8}+p_{10,9}+p_{10,10}$

Si tratta di una distribuzione binomiale con $n=10$, $p=\frac{1}{4}$ = probabilità di avere un successo, cioè probabilità di rispondere correttamente ad una domanda;

$q=1-p=\frac{3}{4}$ = probabilità di ottenere un insuccesso, cioè probabilità di non rispondere correttamente ad una domanda.

$$p(X\geq 8)=p_{10,8}+p_{10,9}+p_{10,10}=\binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2+\binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)^1+\binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{436}{4^{10}}=0,000416$$

Quesito N°5

Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2,-1,2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x-2y+z-9=0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?Noi sappiamo che $\vec{n}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k}=(a,b,c)$ è un vettore perpendicolare al piano α di equazione $ax+by+cz+d=0$.

Questo ci consente di affermare che i parametri direttori di una retta perpendicolare al piano Π di equazione $2x-2y+z-9=0$ $[1]$ sono i numeri $(2,-2,1)$.

Le equazioni parametriche della retta **s** passante per il punto e perpendicolare al Π sono:

$$\begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} \qquad [2]$$

Risolvendo il sistema tra l'equazione del piano Π e le equazioni parametriche della retta **s** troviamo le coordinate del punto di tangenza $\mathbf{T}$. Per fare ciò basta sostituire le $[2]$ nell'equazione $[1]$.
$$2(-2+2\lambda)-2(-1-2\lambda)+(2+\lambda)=0 \qquad \boldsymbol{\lambda=1} \qquad \mathbf{T(0,-3,3)}$$

$$r=KT=\sqrt{(-2-0)^2+(-1+3)^2+(2-3)^2}=3$$

$$r=d(K,\Pi)=\frac{|a\,x_K+b\,y_K+c\,z_K|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-4+2+2-9|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{9}{3}=3$$

Quesito 6

6. Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta: "Esiste un polinomio $P(x)$ tale che: $|P(x)-\cos(x)|\leq 10^{-3}$, $\quad \forall x\in\mathbb{R}$".

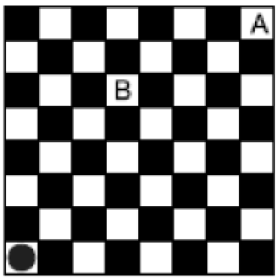
$d(A;B)=|P(x)-\cos x|$ è la distanza tra i punti $A[x;P(x)]$ e $B(x;\cos x)$ situati sopra una generica retta parallela all'asse delle ascisse.

Il quesito proposto chiede se è possibile stabilire che la distanza $d(A;B)$ può essere $\leq 10^{-3}\ \forall k\in\mathbb{R}$

La risposta è negativa in quanto risulta $\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=\infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x=$ quantità finita

Quesito 7

7. Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



Indichiamo con O la posizione iniziale della pedina. Dobbiamo calcolare la probabilità che la pedina, partendo dalla posizione O, arrivi in A passando per la posizione B.

f = numero dei casi favorevoli $\quad n$ = numero dei casi possibili

Per andare dalla posizione O alla posizione A debbo spostare la pedina 7 volte verso destra e 7 verso l'alto.

$$n=C_{14;7}=\binom{14}{7}=\frac{14!}{7!7!}=3432$$

che corrispondono a come si possono posizionare le 7 mosse verso destra rispetto alle 14 mosse richieste dal problema.

Per andare dalla posizione O alla posizione B debbo spostare la pedina 3 volte verso destra e 5 volte verso l'alto e quindi debbo effettuare 8 mosse. I casi possibili sono: $C_{8;3}=\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!5!}=56$

Per andare dalla posizione B alla posizione A debbo spostare la pedina 4 volte verso destra e 2 volte verso l'alto e quindi debbo effettuare 6 mosse. I casi possibili sono: $C_{6;4}=\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!2!}=15$

Per andare dalla posizione O alla posizione A passando per la posizione B posso scegliere uno qualsiasi dei percorsi che vanno dalla posizione O alla posizione B ed uno qualunque dei percorsi che vanno dalla posizione B alla posizione A. Il numero di questi percorsi è uguale a:

$$C_{8;3}\cdot C_{6;4}=56\cdot 15=840 \qquad p=\frac{f}{n}=\frac{C_{8;3}\cdot C_{6;4}}{C_{17;7}}=\frac{840}{3432}=\frac{35}{143}$$

Altra risoluzione

Il numero dei casi possibili per andare dalla posizione O alla posizione A coincide con le permutazioni con ripetizione di 14 mosse delle quali 7 verso destra e 7 verso l'alto.

$$n=P_{14}^{7;7}=\frac{14!}{7!7!}=3432$$

$P_8^{5;3}=\frac{8!}{5!3!}=56$ casi possibili per andare dalla posizione iniziale O alla posizione B; 3 mosse verso destra e 5 mosse verso l'alto

$P_6^{4;2}=\frac{6!}{4!2!}=15$ casi possibili per andare dalla posizione iniziale B alla posizione A; 4 mosse verso destra e 3 mosse verso l'alto

$f=P_8^{5;3}\cdot P_6^{4;2}=840$ = casi favorevoli all'evento richiesto dal problema

$$P=\frac{f}{n}=\frac{P_8^{5;3}\cdot P_6^{4;2}}{P_{14}^{7;7}}=\frac{840}{3432}=\frac{35}{163}$$

Quesito 8

Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(2x+x^2)$, individuare una primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1,2e)$.

$$\int(2x+x^2)e^x\,dx=\int(2x+x^2)\,de^x=(2x+x^2)e^x-\int e^x(2+2x)\,dx=(2x+x^2)e^x-2\int(1+x)\,de^x$$

$$\int(2x+x^2)e^x\,dx=(2x+x^2)e^x-2\int(1+x)\,de^x=(2x+x^2)e^x-2(1+x)e^x+2\int e^x\,dx$$

$$\int(2x+x^2)e^x\,dx=(2x+x^2)e^x-2(1+x)e^x+2e^x+C=\left((\cancel{2x}+x^2)-2(\cancel{1}+\cancel{x})+\cancel{2}\right)e^x+C=x^2e^x+C$$

$F(x)=x^2e^x+C$ insieme di tutte le primitive della funzione $f(x)=(2x+x^2)e^x$

La primitiva passante per il punto $(1,2e)$ si ottiene ponendo nella funzione $F(x)=x^2e^x+C$ $x=1$ e $y=F(x)=2e$ Otteniamo: $2e=e+C$ $C=e$ $F(x)=x^2e^x+e$.

Quesito N°9

Datele rette $r:\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t\end{cases}$ $s:\begin{cases}x+y+z-3=0\\2x-y=0\end{cases}$ ed il punto $P_1(1,0,-2)$ determinare l'equazione del piano passante per $P_1(1,0,-2)$ e parallelo alle due rette.

I parametri direttori della retta **r** sono: $(1,2,1)=\vec{v}$

I parametri direttori della retta **s** si ottengono scrivendola in forma parametrica. Nella seconda equazione poniamo $\mathbf{x=\lambda}$. Otteniamo; $\begin{cases}x=\lambda\\y=2\lambda\\z=3-3\lambda\end{cases}$

I parametri direttori della retta **s** sono: $(1,2,-3)=\vec{w}$

$ax+by+cz+d=0$ è l'equazione di un piano α i cui parametri direttori sono (a,b,c). Questi parametri direttori sono le componenti di un vettore $\vec{n}=(a,b,c)=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k}$ perpendicolare al piano α.

La condizione di parallelismo tra il piano α $ax+by+cz+d=0$ e la retta individuata dal vettore $\vec{u}=(\ell,m,n)$ è data dalla seguente relazione: $a\ell+bm+cn=0$.

$r \| \alpha \quad \Rightarrow \quad a+2b+c=0 \qquad s \| \alpha \quad \Rightarrow \quad a+2b-3c=0$ Otteniamo: $\begin{cases} c = 0 \\ a = -2b \end{cases}$

$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ è l'equazione del piano passante per il punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ed avente parametri direttori (a,b,c). Nel caso nostro otteniamo:

$-2b(x-1)+b(y-0)+0\cdot(x+2)=0 \quad -2\cancel{b}(x-1)+\cancel{b}(y-0)=0 \quad 2x-y-2=0$

Altra risoluzione

L'equazione vettoriale del piano richiesto è: $P-P_1 = h\cdot\vec{v}+k\cdot\vec{w} = h(1,2,1)+k(1,2,-3)$

$\begin{cases} x-1=h+k \\ y=2h+2k \\ z+2=h-3k \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=h+k \\ y=2(h+k) \\ z+2=h-3k \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=h+k \\ y=2(x-1) \\ z+2=h-3k \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=h+k \\ y=2x-2 \\ z+2=h-3k \end{cases}$

Eliminando i parametri h,k otteniamo l'equazione del piano richiesto, cioè: $2x-y-2=0$

Altra risoluzione

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \ell & m & n \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$ è l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ e parallelo alle rette **r** di parametri direttori (ℓ,m,n) ed **s** di parametri direttori (ℓ_1,m_1,n_1)

Utilizzando i dati del problema otteniamo: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad -8(x-1)+4y=0 \qquad 2x-y-2=0$

I vettori complanari $(1,2,1)=\vec{v}$ e $(1,2,-3)=\vec{w}$ individuano rispettivamente le direzioni delle rette **r** ed **s**. Il piano parallelo alle rette **r** ed **s** ha come parametri direttori le componenti del vettore $\vec{n}$ perpendicolare ai vettori $(1,2,1)=\vec{v}$ e $(1,2,-3)=\vec{w}$. Risulta:

$$\vec{n} = \vec{v}\wedge\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} = (-8,4,0)$$

L'equazione del piano richiesto è: $-8(x-1)+4y=0 \quad 2x-y-2=0$

Quesito 10

Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1,+\infty[$: $f(x)=\int_e^{x^2}\frac{t}{\ln t}dt$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

Per calcolare la derivata della funzione $f(x)=\int_a^{x^2}\frac{t}{\ln t}dt=\int_e^{\beta(x)}g(t)dt$ applico il teorema fondamentale del calcolo integrale utilizzando la formula: $f'(x)=2x\cdot\frac{x^2}{\ln x^2}=\frac{2x^3}{\ln x^2}$

L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y=f(x)$ nel punto di tangenza $T(x_T;y_T)$ è la seguente: $y-y_T=f'(x_T)\cdot(x-x_T)$

$$y_T=f\left(\sqrt{e}\right)=\int_e^{\left(\sqrt{e}\right)^2}\frac{t}{\ln t}dt=\int_e^e\frac{t}{\ln t}dt=0 \qquad T\left(\sqrt{e},0\right) \text{ punto di tangenza}$$

$$f'(x)=D\int_e^{x^2}\frac{t}{\ln t}dt=\left(\frac{t}{\ln t}\right)_{t=x^2}\cdot Dx^2=\frac{x^2}{\ln x^2}\cdot 2x=\frac{2x^3}{2\ln x}=\frac{x^3}{\ln x} \qquad f'\left(\sqrt{e}\right)=\frac{e\sqrt{e}}{\ln\sqrt{e}}=\frac{e\sqrt{e}}{\frac{1}{2}\ln e}=2e\sqrt{e}$$

Equazione della retta tangente: $y-y_T=y'(x_T)(x-x_T) \quad y-0=2e\sqrt{e}\left(x-\sqrt{e}\right) \quad y=2e\sqrt{e}\,x-2e^2$