

Si considerino le seguenti funzioni $f(x) = ax^2 - x + b$ e $g(x) = (ax + b)e^{2x - x^2}$.

- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione $g(x)$ ammette un massimo ed un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si intersecano nel punto $A(2,1)$.

$$\text{dom } g(x) = \mathbb{R} \quad g(x) = (ax + b)e^{2x - x^2} = \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}}$$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}} = \frac{\infty}{\infty}$

Per calcolare tale limite applico il teorema di De l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{2(x-1)e^{x^2 - 2x}} = 0$$

Questo ci consente di affermare che la funzione proposta $g(x) = (ax + b)e^{2x - x^2} = \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}}$ è continua e finita in $\mathbb{R}$. Il teorema di Weierstrass ci garantisce l'esistenza di un massimo e di un minimo assoluti per la funzione $g(x) = (ax + b)e^{2x - x^2}$.

Per determinare i massimi ed i minimi della funzione occorre calcolare la derivata prima della

funzione $g(x) = (ax + b)e^{2x - x^2} = \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}}$.

$$g'(x) = a \cdot e^{2x - x^2} + 2(ax + b)(x - 1) \cdot e^{2x - x^2} = [-2ax^2 + 2(a - b) + a + 2b] \cdot e^{2x - x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -2ax^2 + 2(a - b) + a + 2b = 0 \quad \text{Il delta di questa equazione è sempre positivo}$$

Questa equazione ammette sempre due radici reali e distinte in quanto il suo delta è sempre positivo essendo la somma di due quadrati.

$$\frac{\Delta}{4} = (a - b)^2 + 2a(a + 2b) = 3a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + (a + b)^2$$

Queste due radici reali sono le ascisse dei punti di massimo e di minimo assoluti come dimostrato in precedenza.

Siano σ γ i rispettivi grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

$$A(2,1) \in \sigma \Rightarrow f(2)=1 \Rightarrow 4a-2+b=1$$

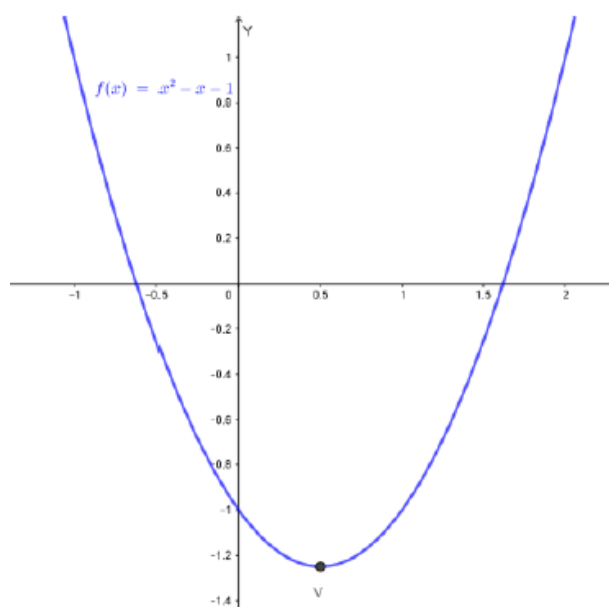
$$A(2,1) \in \gamma \Rightarrow g(2)=1 \Rightarrow (2a+b) \cdot e^0=1 \Rightarrow 2a+b=1 \quad (2a+b) \cdot e^0=1$$

Il sistema da risolvere è:
$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 4a+b=3 \end{cases} \quad \begin{cases} b=1-2a \\ 4a+1-2a=3 \end{cases} \quad \begin{cases} b=1-2a \\ 2a=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

• Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a=1$ e $b=-1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di $g(x)$ ammette un centro di simmetria e che i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ sono tangenti nel punto $B(0;1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana s delimitata dai grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Posto $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ le funzioni da studiare diventano: $f(x)=x^2-x-1$ $g(x)=(x-1)e^{2x-x^2}$

La funzione $f(x)=x^2-x-1$ è una parabola ad asse verticale il cui vertice coincide col punto $V\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$. La parabola incontra gli assi cartesiani nei punti $B(0;-1)$, $C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.



Studiamo la funzione $g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$ utilizzando i risultati ottenuti in precedenza.

$$\text{dom } g(x) = \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{e^{x^2-2x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2(x-1)e^{x^2-2x}} = 0$$

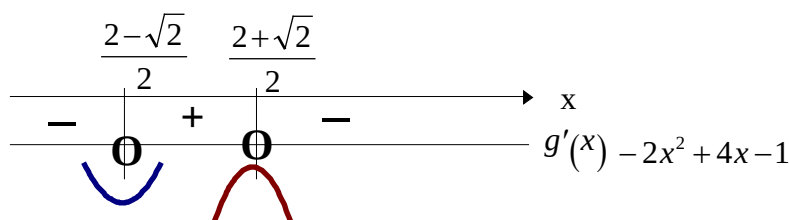
$y=0$ (asse delle ascisse) è l'asintoto orizzontale della funzione.

$$x=0 \Rightarrow y=-1 \quad B(0;-1) \quad y=0 \Rightarrow (x-1)e^{2x-x^2}=0 \Rightarrow x=1 \quad E(1;0)$$

$$g(x) > 0 \quad (g(x) < 0) \quad \text{se } x > 1 \quad (x < 1)$$

Monotonia della funzione ed eventuali punti estremanti

$$g'(x) = (-2x^2 + 4x - 1) \cdot e^{2x-x^2} \quad g'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 4x - 1 = 0 \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$



$$N\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}e}{2}\right) \quad \textbf{immagine geometrica} \text{ del minimo assoluto}$$

$$M\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}e}{2}\right) \quad \textbf{immagine geometrica} \text{ del massimo assoluto}$$

Concavità della funzione ed eventuali punti di flesso

$$g''(x) = 2(2x^3 - 6x^2 + 3x + 1) \cdot e^{2x-x^2} = 2(x-1)(2x^2 - 4x - 1) \cdot e^{2x-x^2}$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 2(x-1)(2x^2 - 4x - 1) = 0 \Rightarrow x=1 \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

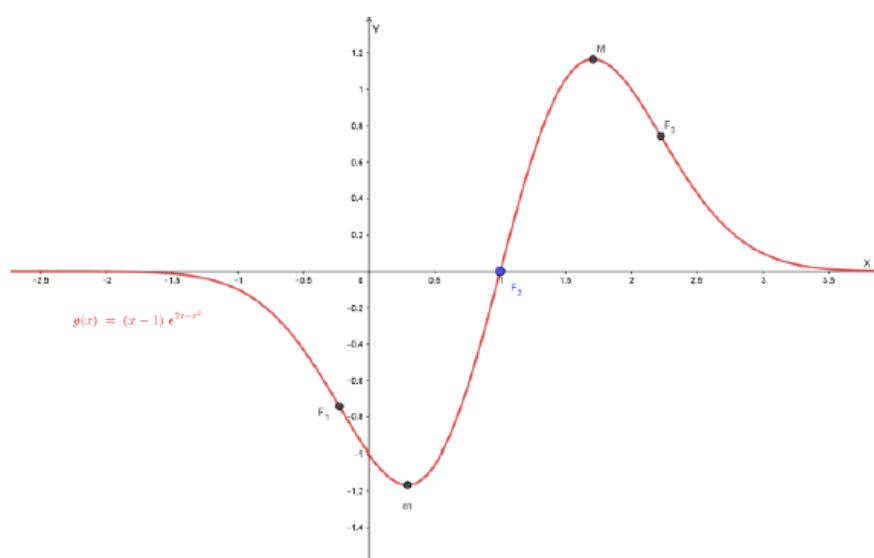
	$\frac{2-\sqrt{6}}{2}$		1		$\frac{2+\sqrt{6}}{2}$	
$x-1$	-		-		+	+
$2x^2-4x-1$	+		-		-	+
$g''(x)$	-	0	+	0	-	0
$g(x)$						

$x = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$ punto di flesso ascendente $x = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$ punto di flesso ascendente

$x=1$ punto di flesso discendente

Le immagini geometriche dei punti di flesso della funzione $g(x)$ sono:

$$F_1\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}e}{2}\right) \quad F_2(1;0) \quad F_3\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}e}{2}\right)$$



I punti M, N, F_1, F_3 sono simmetrici rispetto al punto $F_2(1;0)$ e questo ci consente di affermare che il grafico della funzione $g(x)$ è simmetrico rispetto al punto $F_2(1;0)$.

Adesso dimostriamo quanto affermato in precedenza.

$\begin{cases} \frac{x+X}{2}=1 \\ \frac{y+Y}{2}=0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x=2-X \\ y=-Y \end{cases}$ sono le equazioni di una simmetria di centro $F_2(1;0)$. Per

dimostrare che il grafico della funzione $g(x)$ è simmetrico rispetto al punto $F_2(1;0)$ basta x con $2-x$ e y con $-y$ e, effettuati tutti i calcoli, ritrovare l'espressione $y=(x-1)e^{2x-x^2}=g(x)$.

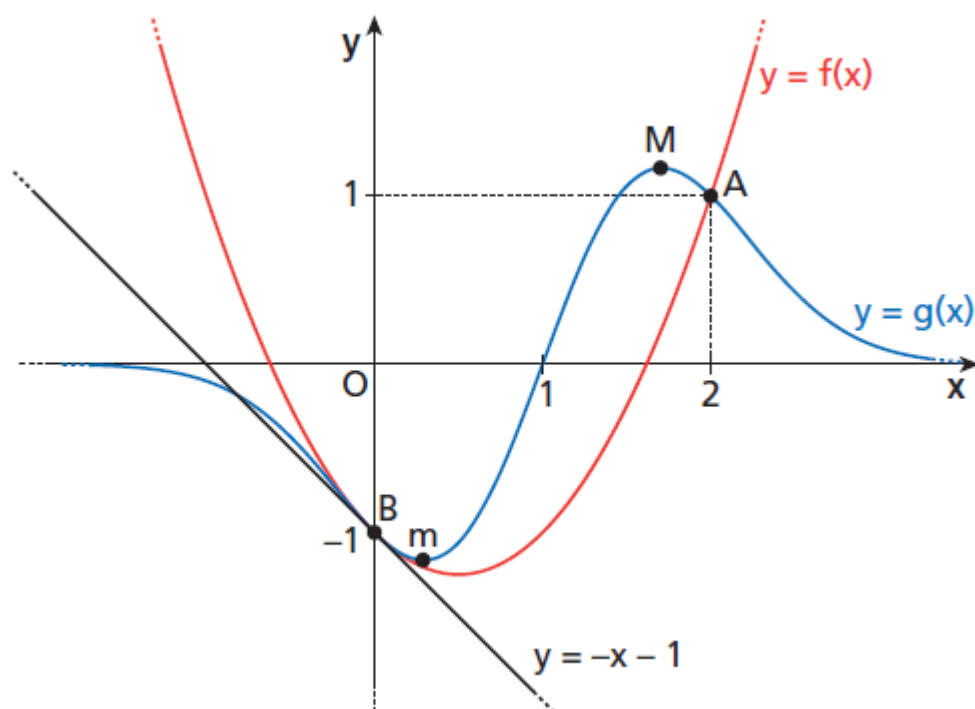
$$-y=(-x+2-1) \cdot e^{2(2-x)-(2-x)^2} \quad y=(x-1) \cdot e^{4-2x-4+4x-x^2}=(x-1) \cdot e^{2x-x^2}=g(x)$$

Due curve sono tangenti in un punto se in tale punto ammettono la stessa tangente.

Poiché entrambi i grafici passano per il punto $B(0;-1)$ basta verificare che risulta

$$f'(x)=2x-1 \quad f'(0)=-1 \quad g'(x)=(-2x^2+4x-1) \cdot e^{2x-x^2} \quad g'(0)=-1$$

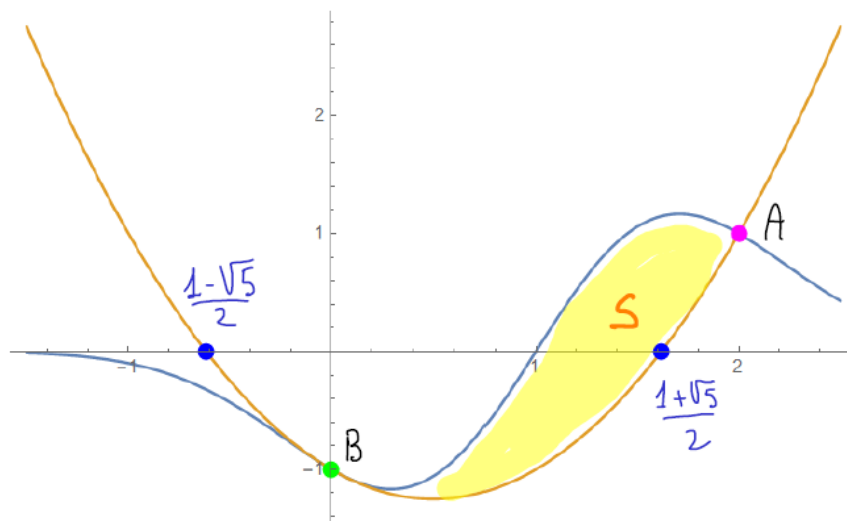
$y=-x-1$ è l'equazione della tangente comune.



Per calcolare l'area S della regione finita di piano delimitata dalle curve σ, γ basta calcolare il seguente integrale definito:

$$S = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^2 [(x-1) \cdot e^{2x-x^2} - x^2 + x + 1] dx = \left[-\frac{1}{2}e^{2x-x^2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2$$

$$S = \left[-\frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 2 + 2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{4}{3} \quad \int (x-1) \cdot e^{2x-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{2x-x^2} d(2x-x^2) = -\frac{1}{2} e^{2x-x^2}$$



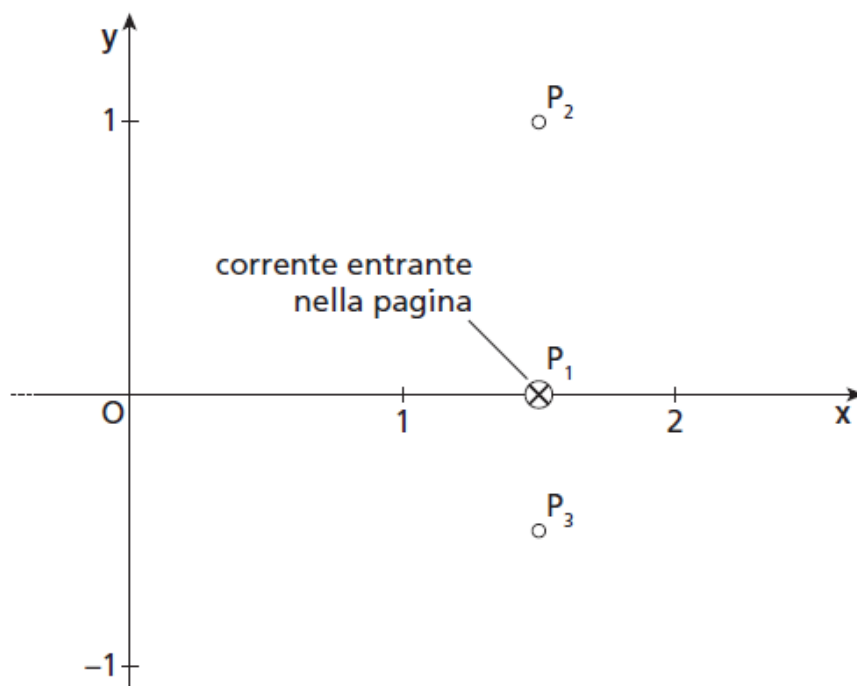
Problema di fisica

Teorema della circuitazione di Ampere

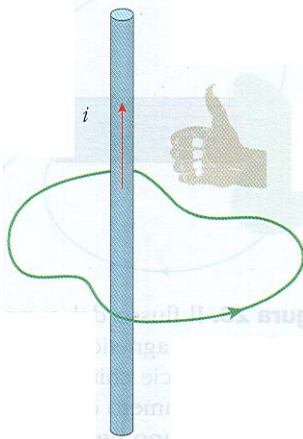
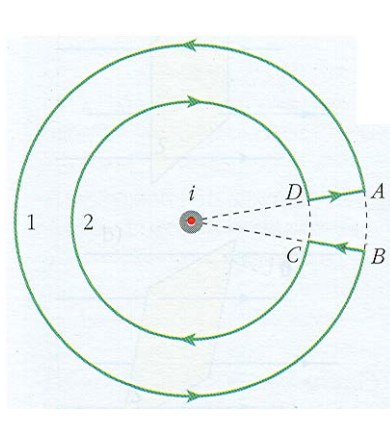
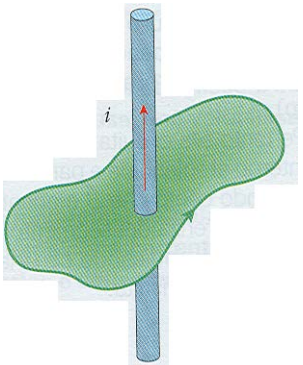
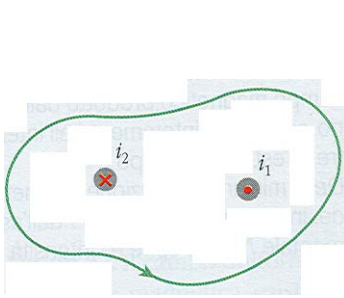
La circuitazione del vettore campo magnetico $\vec{B}$, calcolata lungo un percorso C chiuso qualsiasi, è uguale al prodotto della permeabilità magnetica μ_0 per la corrente totale i_c somma algebrica di tutte le correnti concatenate col percorso.

Per una sola corrente abbiamo: $C_\ell(\vec{B}) = \mu_0 i$ Per più correnti concatenate abbiamo:

$$C_\ell(\vec{B}) = \mu_0 (i_1 + i_2 + \dots + i_n) = \sum_{s=1}^n \mu_0 i_s = \mu_0 i_c$$



- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti $P_1\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $P_3\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. I fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2,0 A$, i_2 e i_3 . Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati. Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1 , i_2 e i_3 , lungo il contorno di S , a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3 .

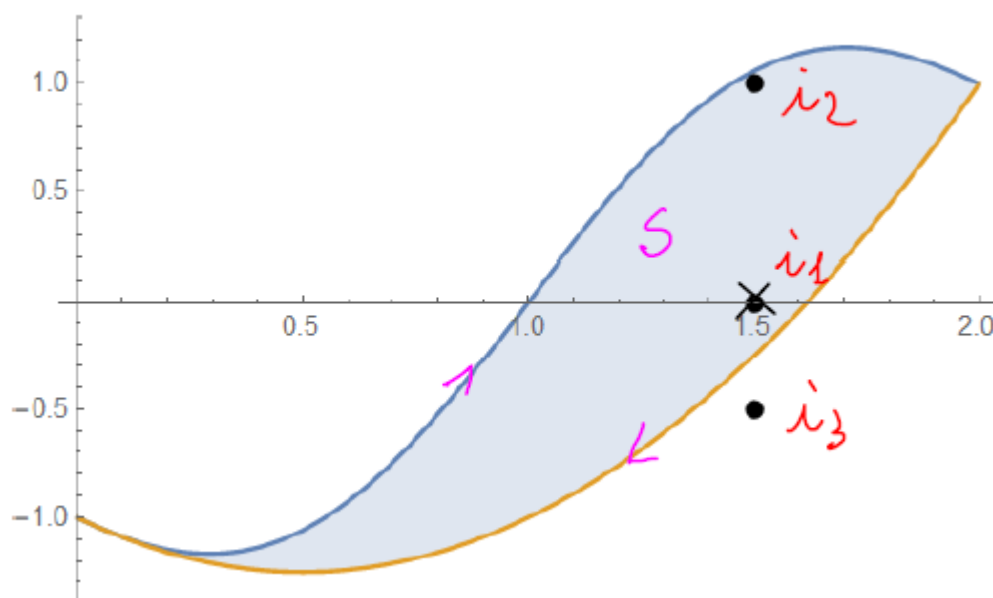
Stabilito il verso di percorrenza della linea chiusa su cui si calcola la circuitazione del campo magnetico, la corrente concatenata con la linea è assunta con segno positivo se circola nel verso indicato dal pollice della mano destra quando le altre dita sono avvolte nel verso della linea; in caso contrario è assunta con segno negativo		La circuitazione del campo magnetico lungo il percorso chiuso ABCDA, con il quale la corrente i che genera il campo non è concatenata, è nulla	
E' concatenata con una linea chiusa ogni corrente che attraversi una qualunque superficie, anche non piana, avente come contorno la linea considerata		Percorrendo la linea chiusa in senso antiorario, la corrente concatenata i_1, uscente dal foglio, è positiva; la corrente concatenata i_2, entrante, è negativa. La corrente totale concatenata con la linea è $i_c = i_1 - i_2$	

Abbiamo: $i_2 = 2A$, $P_1\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $P_3\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Stabiliamo quali delle tre correnti risultano concatenate col contorno γ .

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot e^{2\frac{3}{2} - \frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{3}{4}} \approx 1,06 \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9 - 6 - 4}{4} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

$$-\frac{1}{2} = -0,5 < -0,25 < 1 < 1,06$$

Questo ci consente di affermare che sono concatenate col contorno γ soltanto le correnti i_1 e i_2 . La corrente i_3 , non essendo concatenata col contorno γ , non influisce sul calcolo della circuitazione del vettore $\vec{B}$. $C(\vec{B}) = \mu_0(2A + i_2)$



Per stabilire i segni delle tre correnti orientiamo in senso orario il contorno γ .

Risulta sicuramente positiva la corrente $i_2 = 2A > 0$.

Se i_1 ha lo stesso segno di i_2 e quindi ha verso uscente abbiamo: $C(\vec{B}) = \mu_o(2A + i_2) > 0$

Se i_2 ha segno opposto rispetto ad i_1 (ha verso entrante) abbiamo: $C(\vec{B}) = \mu_o(2A + i_2)$

$$C(\vec{B}) > 0 \Rightarrow \mu_o(2A + i_2) > 0 \Rightarrow i_2 > -2A$$

$$C(\vec{B}) < 0 \Rightarrow \mu_o(2A + i_2) < 0 \Rightarrow i_2 < -2A$$

Se $i_2 = -2A$ abbiamo: $C(\vec{B}) = \mu_o(2A - 2A) = 0$

Se orientiamo il contorno γ in verso antiorario otteniamo risultati opposti.

- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0,20 \, \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1,5 \cdot 10^{-2} \, \text{T}$ perpendicolare alla regione S . Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a $5,0 \, \text{mA}$. Determinare il valore di ω .

La rotazione della spira attorno all'asse x genera nella spira un flusso del vettore $\vec{B}$ che varia secondo la legge: $\Phi_s(\vec{B}) = B \cdot S \cdot \cos \alpha = B \cdot S \cdot \cos \omega t$ avendo supposto che all'istante $t=0$ il piano della spira coincida col piano Oxy e che $\alpha = \omega t$ è l'angolo formato dal vettore $\vec{B}$ con la normale al piano della spira. Abbiamo calcolato in precedenza: $S = \frac{4}{3}$

La variazione nel tempo del flusso del vettore $\vec{B}$ concatenato col circuito genera in esso una **corrente indotta** la cui **f.e.m.** vale:

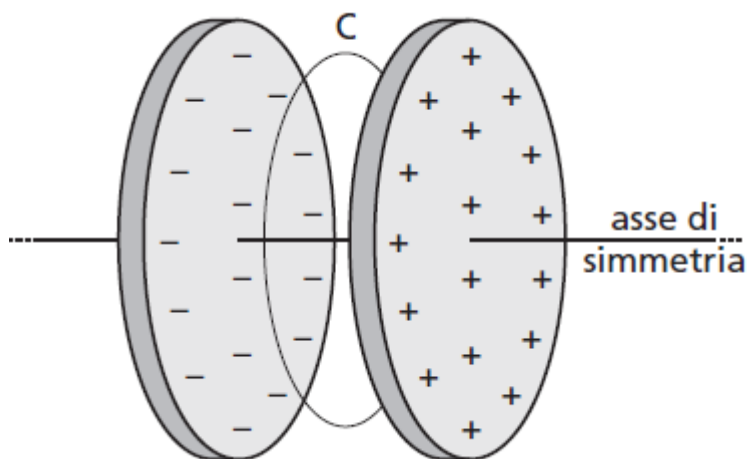
$$f = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = - \frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) = BS \omega \sin \omega t \quad \text{Il suo valore massimo si ottiene se risulta}$$

$\sin \omega t = 1$ $f_{\max} = BS \omega$ la relazione $i = \frac{f}{R}$ ci consente di scrivere:

$$f_{\max} = i_{\max} \cdot R = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 = 10^{-3} \, \text{V}$$

$$f_{\max} = BS \omega \Rightarrow \omega = \frac{f_{\max}}{BS} = \frac{10^{-3}}{1,5 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{4}{3}} = 0,05 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- 2 Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R , poste a distanza d , dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in tesla (T), varia secondo la legge

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r \quad \text{con } r \leq R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di a e k , spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore?

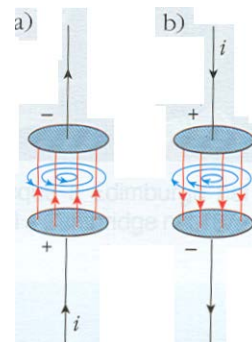
La somma $t^2 + a^2$ è possibile solo se sono fra loro omogenee le grandezze t e a . Per questo motivo la grandezza a rappresenta un tempo e va misurata in secondi. $\{a\} = \{t\} = \text{sec}$

Per determinare l'unità di misura della grandezza k bisogna ricorrere all'analisi dimensionale:

$$B = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \cdot r \quad k = \frac{B \cdot \sqrt{(t^2 + a^2)^3}}{t \cdot r} \quad [k] = \frac{[B] \cdot [t^3]}{[t] \cdot [L]} = \frac{[B] \cdot [t^2]}{[L]}$$

$$\{k\} = \frac{\{B\} \cdot \{t^2\}}{\{L\}} = \frac{T \cdot s^2}{m} = \frac{\text{telsa} \cdot (\text{secondo})^2}{\text{metro}}$$

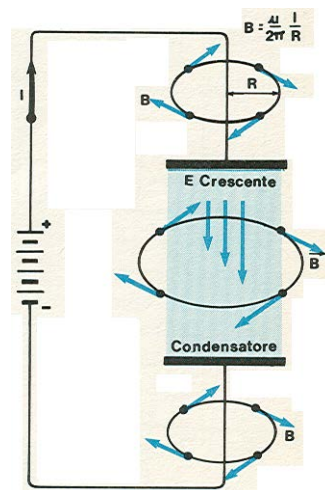
In base all'ipotesi di Maxwell, il **campo elettrico variabile** nel tempo presente fra le armature del condensatore genera un **campo magnetico indotto**. Le linee del campo magnetico sono mostrate nei due casi in cui il campo elettrico, d'intensità crescente, sia diretto **(a)** verso l'alto e **(b)** verso il basso



Ogni qual volta in una certa regione di spazio c'è un campo elettrico variabile nel tempo nasce in quella stessa zona di spazio un campo magnetico anch'esso variabile nel tempo.

Maxwell riteneva che una variazione del campo elettrico $\vec{E}$ creasse una corrente di spostamento i_s il cui valore era:

$$i_s = \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

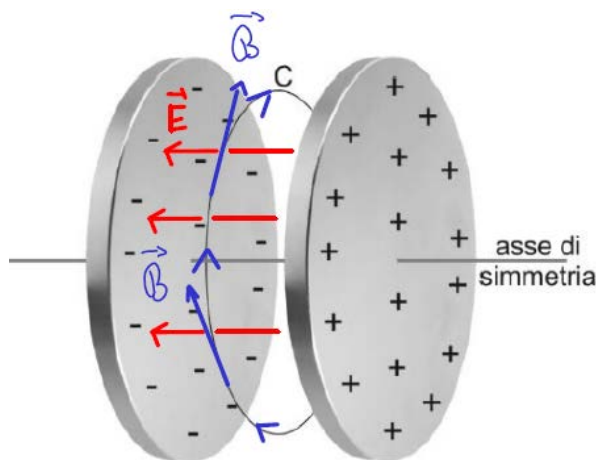


La corrente di spostamento $i_s(t) = \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt}$ produce un effetto magnetico simile a quello generato dal movimento delle cariche elettriche di un conduttore.

Si genera così un campo magnetico indotto variabile.

Le linee del campo magnetico generato dalla corrente di spostamento sono circonferenze concentriche con l'asse di simmetria del condensatore.

I vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari fra loro in ogni punto.



- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r . Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo C e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da C , è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.

A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

La differenza di potenziale variabile, produce, tra le piastre del condensatore, un campo elettrico variabile il quale, a sua volta, genera un campo magnetico variabile e così di seguito.

La quarta equazione di Maxwell $C_{\ell.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\sum_{k=1}^n i_k + \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt} \right)$, nel caso previsto dal problema

diventa $C_{\ell.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt}$

$$C_{\ell.c.}(\vec{B}) = 2\pi r B = \frac{2\pi k t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \cdot r^2 \quad \text{e} \quad C_{\ell.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt} = \frac{C_{\ell.c.}(\vec{B})}{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \quad \Phi_s(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \int_0^t \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} dt$$

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \int_0^t (t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} d(t^2 + a^2) = \left[\frac{k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{(t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^t = \left[\frac{-2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right]_0^t$$

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

$$\Phi_s(\vec{E}) = E \cdot S = \pi r^2 E \quad \Phi_s(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_o \epsilon_o} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right) \Rightarrow \cancel{\pi r^2} E = \frac{2k \cancel{\pi r^2}}{\mu_o \epsilon_o} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

$$E = \frac{2k}{\mu_o \epsilon_o} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

La differenza di potenziale tra le armature di un condensatore piano si calcola applicando la

seguente formula: $\Delta V = E d \Rightarrow \Delta V = \frac{2k d}{\mu_o \epsilon_o} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} B = k r \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} = k r \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\sqrt{t^6}} = k r \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t^3} = k r \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta V = \frac{2k d}{\mu_o \epsilon_o} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right) = \frac{2k d}{\mu_o \epsilon_o a} = \text{costante}$$

Se la differenza di potenziale agli estremi del condensatore si mantiene costante il campo elettrico tra le sue armature è costante e non genera nessun campo magnetico. In questa situazione non c'è corrente di spostamento.

- Per $a > 0$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}$. Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine.

Studiare la funzione F individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

Per verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva della funzione $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}$

basta dimostrare che $F'(t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$$F'(t) = D \left[(t^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{a} \right] = -\frac{1}{2} (t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2t = \frac{-t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} = f(t)$$

Studiamo la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$

$$\text{dom } F = \mathbb{R} \quad F=0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \quad t^2 = 0 \quad t=0$$

$t=0 \Rightarrow F=0$ Il grafico della funzione F passa per l'origine degli assi cartesiani

$F(-t) = \frac{1}{\sqrt{(-t)^2 + a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} = F(t)$ Si tratta di una funzione pari; il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

$F(t) < 0 \quad \forall t \neq 0$ Si tratta di una funzione non positiva.

Comportamento della funzione agli estremi del dominio

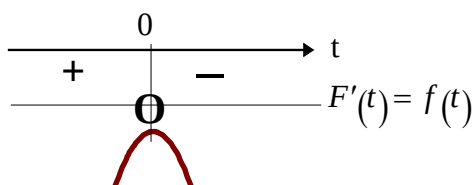
$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \right) = -\frac{1}{a}$ la retta di equazione $F = -\frac{1}{a}$ è l'asintoto orizzontale

completo del grafico della funzione

Studio della monotonia della funzione e calcolo di eventuali punti estremanti

$$F'(t) = f(t) = \frac{-t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} = -t(t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \quad F'(t) = 0 \Rightarrow t=0 \text{ punto di massimo assoluto}$$

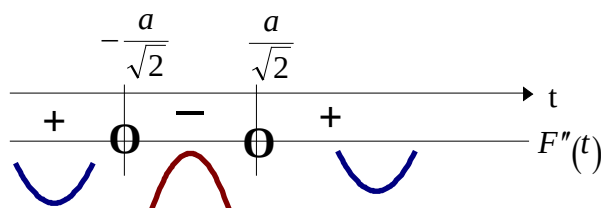
$F(0)=0$ massimo assoluto $O(0,0)$ immagine geometrica del massimo assoluto



Studio della concavità della funzioni e calcolo di eventuali punti di flesso

$$F''(t) = f'(t) = -D \left[t(t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = - \left[(t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} t(t^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2t \right] = - \left[(t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} - 3t^2(t^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} \right]$$

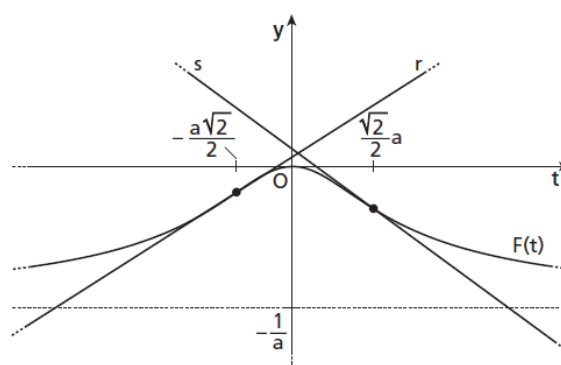
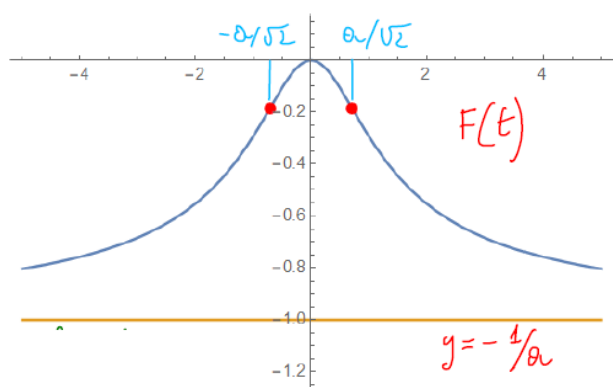
$$F''(t) = 0 \Rightarrow 2t^2 - a^2 = 0 \Rightarrow t = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$



$t = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ punto di flesso discendente $t = \frac{a}{\sqrt{2}}$ punto di flesso ascendente

$$F\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} - \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{a\sqrt{3}}$$
 ordinata dei due punti di flesso

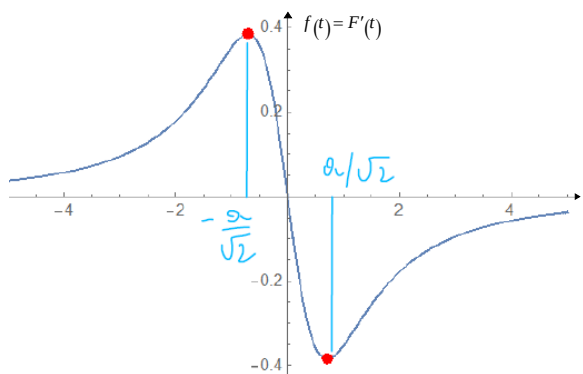
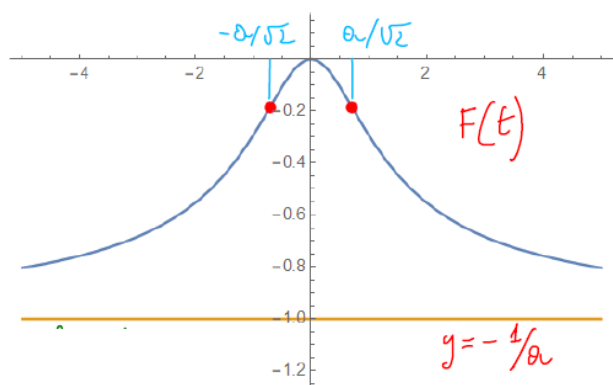
$$A\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{a\sqrt{3}}\right) \quad B\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{a\sqrt{3}}\right)$$
 immagini geometriche dei due punti di flesso



$$t_1: y - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}a^2} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \quad t_2: y - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}a^2} \left(x + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$
 equazioni delle due tangenti

inflessionali

- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F , specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f . Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f , l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^b f(t) dt$.

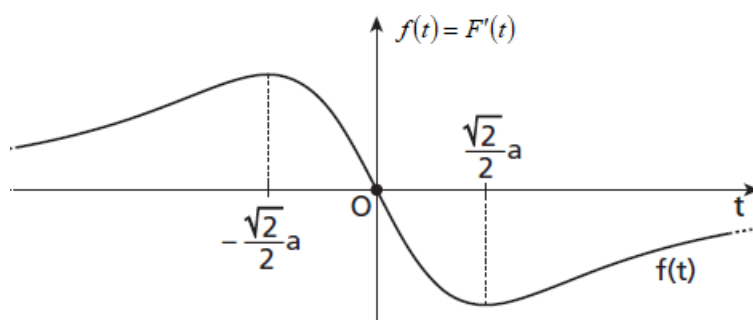


Otteniamo il grafico della funzione $f(t) = F'(t)$ dal grafico della funzione $F(t)$ in base alle seguenti considerazioni:

- $F(t)$ funzione pari $\Rightarrow f(t) = F'(t)$ funzione dispari
- $f(t) > 0 \quad \forall t \in]-\infty, 0[$ in tale intervallo la funzione $F(t)$ è strettamente crescente
- $f(t) < 0 \quad \forall t \in]0, +\infty[$ in tale intervallo la funzione $F(t)$ è strettamente decrescente
- $F(0) = 0$ è un massimo assoluto per la funzione $F(t)$ e quindi $f(0) = F'(0) = 0$. Il grafico della funzione $f(t) = F'(t)$ passa per l'origine degli assi cartesiani.
- Gli estremi della funzione $f(t) = F'(t)$ coincidono con i flessi della funzione $F(t)$. Questo ci consente di affermare che $t = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ sono punti di massimo e di minimo assoluti
- $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = -\frac{1}{a} = \text{costante} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = F'(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ è l'asintoto orizzontale del grafico della funzione $f(t) = F'(t)$

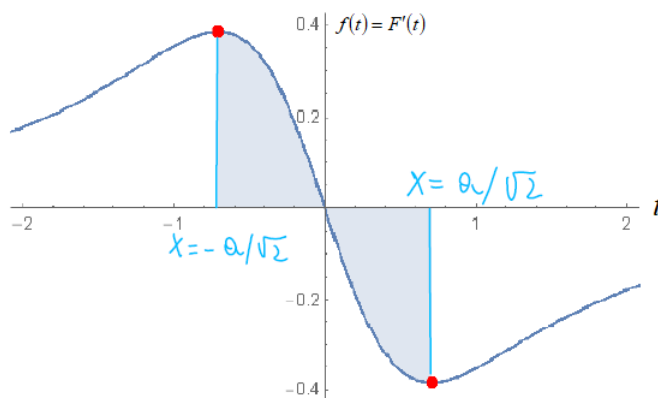
La funzione $f(t)$ è la derivata prima di $F(t)$ che è una funzione pari; ne deriva che $f(t)$ è una funzione dispari. Inoltre i punti stazionari della funzione $f(t)$ si trovano in corrispondenza dei punti di flesso della funzione $F(t)$.

L'andamento del grafico della funzione $f(t)=F'(t)$ è il seguente:

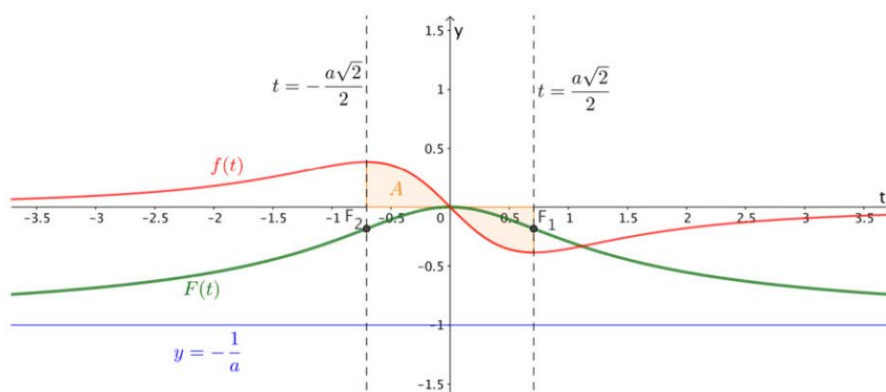
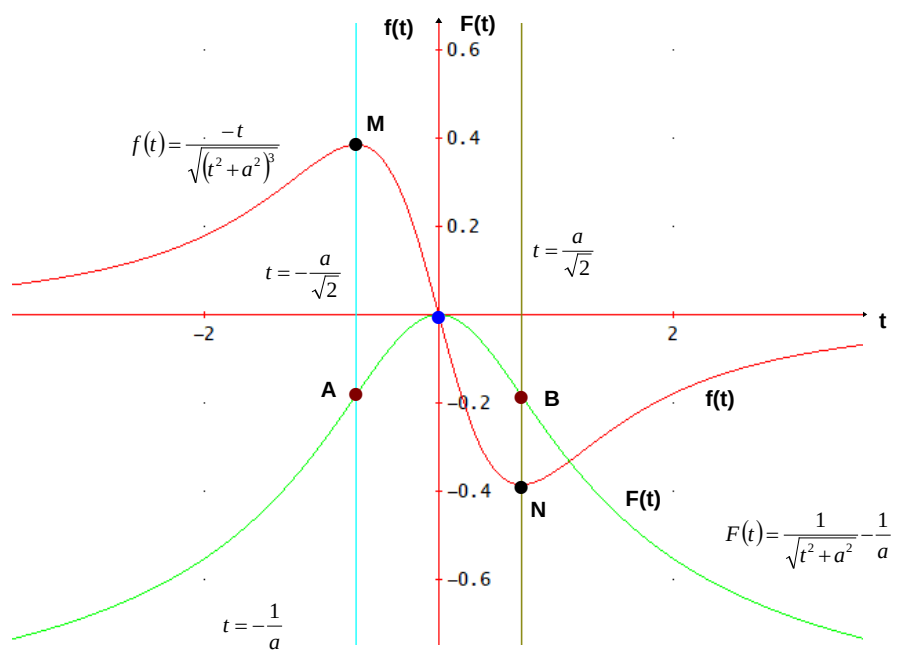


Ricordando che il grafico della funzione $f(t)=F'(t)$ è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani possiamo scrivere:

$$S = 2 \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^0 f(t) dt = 2F(0) - 2F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 0 - \frac{2}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2}} + \frac{2}{a} = \frac{2}{a} - \frac{2}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$



$$S = \frac{2}{a} \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{3a} (3 - \sqrt{6})$$



1 Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $\frac{12}{5}$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x=3$, $x=-3$ e $y=5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f .

$$f(0) = f\left(\frac{12}{5}\right) = 0 \Rightarrow p(x) = a(x) \cdot x \left(x - \frac{12}{5}\right) \text{ con } a(x) \text{ polinomio che verifica la relazione}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5.$$

Essendo $x = \pm 3$ le equazioni dei due asintoti verticali avremo: $x^2 + d = (x-3)(x+3) = x^2 - 9$

Questo ci consente di scrivere la funzione proposta nella seguente maniera: $f(x) = \frac{a(x) \cdot x \left(x - \frac{12}{5}\right)}{x^2 - 9}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x) \cdot x \left(x - \frac{12}{5}\right)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} a(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \frac{12}{5}x}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} a(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} a(x) \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 5$$

$$\Rightarrow a(x) = 5$$

La funzione proposta diventa: $f(x) = \frac{5x \left(x - \frac{12}{5}\right)}{x^2 - 9} = \frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9}$

$\text{dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$ $x = \pm 3$ e $y = 5$ gli asintoti del grafico della funzione

$$f'(x) = \frac{(10x-12)(x^2-9) - 2x(5x^2-12x)}{(x^2-9)^2} = \frac{12x^2-90x+108}{(x^2-9)^2}$$

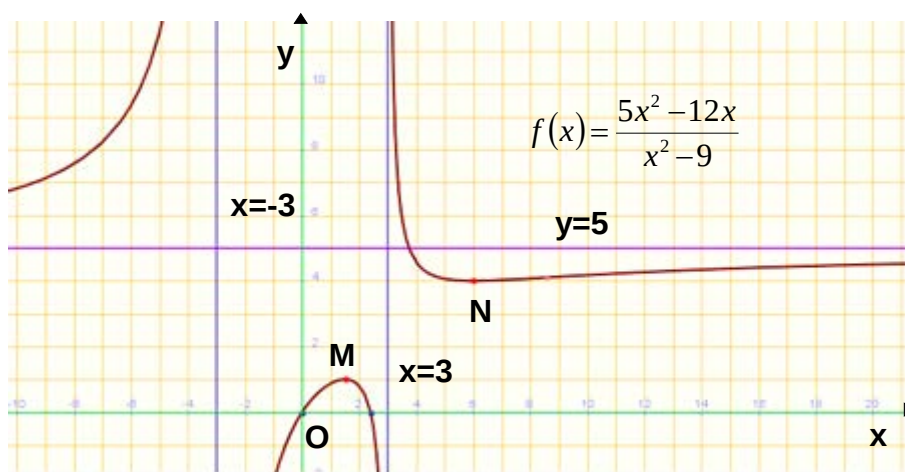
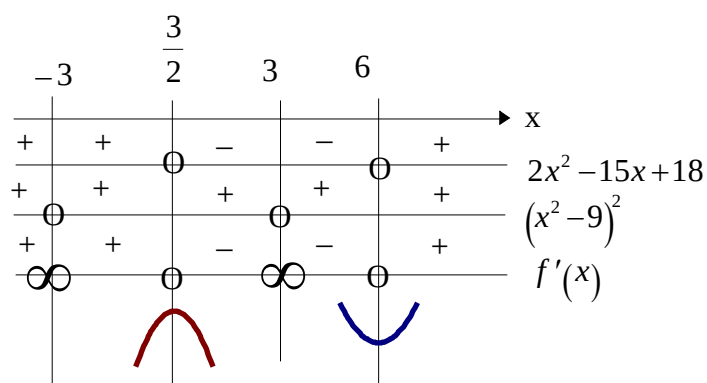
$$f'(x) = \frac{6(2x^2-15x+18)}{(x^2-9)^2} = \frac{6(x-6)(2x-3)}{(x^2-9)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=6$ **punto di minimo relativo** $f(6)=4$ minimo relativo

$N(6,4)$ **immagine geometrica del minimo relativo**

$x=\frac{3}{2}$ **punto di massimo relativo** $f\left(\frac{3}{2}\right)=1$ massimo relativo

$M\left(\frac{3}{2},1\right)$ **immagine geometrica del massimo relativo**



2 E' assegnata la funzione $g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2017} + x^{2019}$. Provare che

esiste un solo valore $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che risulti $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore

del seguente limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x}$.

$$g(x) = x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2016} + x^{2018}) \quad g(x) = 0 \Rightarrow x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2016} + x^{2018}) = 0$$

$x=0$ è l'unica soluzione di tale equazione in quanto il polinomio $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2016} + x^{2018}$, essendo somma di quantità positive, non si annulla mai. Quindi esiste un solo valore $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$ tale che risulti $g(x_0) = g(0) = 0$

Per calcolare il limite Per calcolare bisogna ricordare la seguente proprietà sull'ordine degli infiniti:

Quando $x \rightarrow +\infty$ l'infinito a^x è di ordine superiore rispetto all'infinito x^d se $a > 1$ e $d > 0$

L'infinito di un esponenziale (a^x) è di ordine superiore rispetto all'infinito di una potenza (x^d)

$$\text{per } x \rightarrow +\infty \quad g(x) = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2017} + x^{2019} \sim x^{2019} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2019}}{1,1^x} = 0$$

Possiamo ottenere lo stesso risultato ricorrendo al teorema degli zeri di una funzione

TEOREMA (di esistenza degli zeri) N° 7:

Se $f(x)$ è una funzione **continua** in un intervallo limitato e chiuso $[a, b]$, se risulta $f(a) \cdot f(b) < 0$,

allora $\exists x_0 \in]a, b[: f(x_0) = 0$.

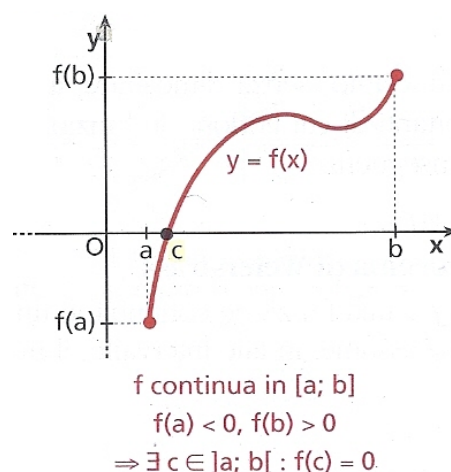
Se $f(x)$ è anche strettamente crescente o strettamente decrescente in $[a, b]$ abbiamo: $\exists^* x_0 \in]a, b[: f(x_0) = 0$

cioè esiste ed è unico il punto x_0 interno all'intervallo $[a, b]$ per il quale risulta $f(x_0) = 0$.

$g(-x) = -g(x) \Rightarrow g(x)$ funzione dispari ed agli estremi del suo dominio assume valori opposti

come si deduce facilmente dalla relazione: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$

La funzione proposta si annulla almeno una volta in $\mathbb{R}$



$$g'(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + \dots + 2019x^{2018} > \forall x \in \mathbb{R}$$

$g(x)$ è una funzione strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e, quindi, in tale intervallo si annulla una sola volta.

Possiamo calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x}$, che si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, ricordando che la derivata di ordine $n+1$ di un qualsiasi polinomio di grado n è nulla. Infatti la derivata seconda di un polinomio di primo grado è nulla, la derivata terza di un polinomio di secondo grado è nulla e così di seguito.

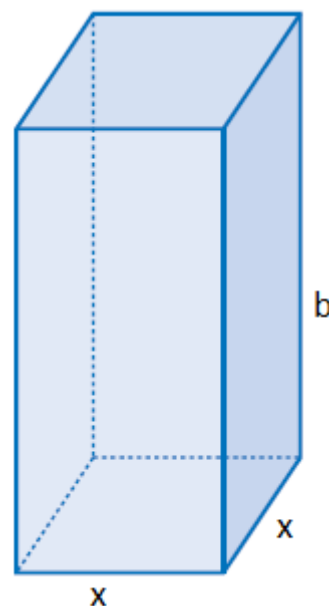
Per calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x}$ possiamo applicare la regola di De L'Hospital. Ricordando che la derivata di ordine $2n$ del polinomio $g(x)$ si annulla possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{(\ln 1,1) \cdot 1,1^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g''(x)}{(\ln 1,1)^2 \cdot 1,1^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{2n}(x)}{(\ln 1,1)^{2n} \cdot 1,1^x} = \frac{0}{\infty} = 0$$

3 Fra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area S , determinare quello per il quale la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

La somma s di due variabili numeriche positive x ed y , avente prodotto $p = a^2$ costante, è **minima** quando esse assumono valori uguali, cioè:

$$\left. \begin{array}{l} xy = p = \text{costante} \\ x, y, p \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right\} \Rightarrow s = x + y \text{ è } \mathbf{\text{minima}} \text{ per } \mathbf{x = y}$$



Sia x il lato del quadrato base del parallelepipedo e b la sua altezza.

$y = 8x + 4b$ è la funzione da rendere minima.

Risulta: $S = 2x^2 + 4bx$ $4bx = S - 2x^2 > 0$ essendo x e b variabili numeriche positive.

$$S - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{S}{2}}$$

$$4bx = S - 2x^2 \Rightarrow b = \frac{S - 2x^2}{4x} \quad y = 8x + \cancel{4} \frac{S - 2x^2}{\cancel{4} x} = 8x + \frac{S}{x} - 2x = 6x + \frac{S}{x} \quad y = 6x + \frac{S}{x}$$

La variabile y avente prodotto $p = 6x \cdot \frac{S}{x} = 6S = \text{costante}$, somma delle due variabili numeriche positive $6x$ ed $\frac{S}{x}$, è minima quando le due variabili assumono valori uguali, cioè quando risulta:

$$6x = \frac{S}{x} \quad x^2 = \frac{S}{6} \quad x = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

$$b = \frac{S - 2x^2}{4x} = \frac{S - 2 \cdot \frac{S}{6}}{4 \cdot \sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot S}{4 \cdot \sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{\frac{S}{6}}{\sqrt{\frac{S}{6}}} = \sqrt{\frac{S}{6}} = x \quad \text{Il parallelepipedo richiesto è un cubo.}$$

Possiamo trovare lo stesso risultato utilizzando le derivate.

$$y(x) = 6x + \frac{S}{x} \quad y'(x) = 6 - \frac{S}{x^2} = \frac{6x^2 - S}{x^2} \quad y'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - S = 0 \quad x^2 = \frac{S}{6} \quad x = \sqrt{\frac{S}{6}} \quad \text{punto di}$$

$$\text{minimo assoluto in quanto risulta} \quad y''(x) = \frac{2S}{x^3} > 0 \quad \forall x \in \left] 0, \sqrt{\frac{S}{6}} \right[$$

La somma delle lunghezze degli spigoli vale:

$$y\left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right) = 6\sqrt{\frac{S}{6}} + \frac{S}{\sqrt{\frac{S}{6}}} = \sqrt{6S} + \cancel{\cancel{S}} \cdot \frac{\sqrt{S}}{\cancel{\cancel{S}}}{\cancel{6}} = \sqrt{6S} + \sqrt{6S} = 2\sqrt{6S}$$

4 Dati i punti $A(2,0,-1)$ e $B(-2,2,1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che risulti $PA=\sqrt{2}PB$, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10,8,7)$ appartiene ad S e determinare l'equazione del piano α tangente in $T(-10,8,7)$ ad S .

$$PA=\sqrt{2}PB \Rightarrow PA^2=2PB^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-0)^2+(z+1)^2=2[(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2]$$

$$x^2-4x+4+y^2+z^2+2z+1=2x^2+8x+8+2y^2-8y+8+2z^2-4z+2$$

$$x^2+y^2+z^2+12x-8y-6z+13=0$$

Si tratta di una sfera di centro $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \equiv (-6, 4, 3)$

$$\text{e raggio } r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}}-d=\sqrt{36+16+9-13}=\sqrt{48} \quad \mathbf{r=4\sqrt{4}}$$

Verifichiamo che il punto $T(-10,8,7)$ appartiene alla sfera S . Un punto appartiene ad una superficie quando le sue coordinate verificano l'equazione della superficie.

$$(-10)^2+8^2+7^2+2(-10)-8\cdot 8-6\cdot 7+13=0 \quad 100+64+49-120-64-42+13=0 \Rightarrow T \in S$$

Il vettore $\vec{N}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=(a,b,c)$ è un vettore perpendicolare al piano di equazione $ax+by+cz+d=0$.

$P-P_1=(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}+(z-z_1)\vec{k}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$ sono le componenti cartesiane del vettore $P-P_1$.

$(P-P_1) \times \vec{N}=0$ e quindi $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ rappresenta l'equazione del piano passante per il punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e perpendicolare al vettore $\vec{N}$.

Il vettore $\overrightarrow{CT}=T-C=(x_{T-C}, y_{T-C}, z_{T-C})=(-4, 4, 4)$ è perpendicolare al piano α passante per il punto T e tangente alla superficie S .

$(T-C) \times (P-T) = 0$ è l'equazione vettoriale del piano α con $P(x, y, z)$ e $T-C = \vec{N}$

$$(-4, 4, 4) \times (x+10, y-8, z-7) = 0 \quad -4(x+10) + 4(y-8) + 4(z-7) = 0 \quad x-y-z+25=0$$

Utilizzando la relazione $a(x-x_T) + b(y-y_T) + c(z-z_T) = 0$ otteniamo lo stesso risultato di prima, cioè: $-4(x+10) + 4(y-8) + 4(z-7) = 0 \quad x-y-z+25=0$

5 Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.

- Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
- Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
- Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

La probabilità $p(A)$ di un evento aleatorio A coincide col rapporto tra il numero m dei casi favorevoli all'evento A ed il numero n dei casi possibili nell'ipotesi che essi siano tutti equiprobabili. In formule abbiamo:

$$p(A) = \frac{m}{n} \quad \text{con} \quad m \leq n \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

$D'_{n,k} = n^k$ = disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k .

- Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?

Il numero dei casi possibili nel lancio dei 4 dadi con le facce numerate da 1 a 6 è uguale al numero delle disposizioni con ripetizione di 6 elementi di classe 4: $n=6^4=1296$

I **casi favorevoli** sono 5, precisamente quando i lanci danno i seguenti risultati:

d_1	d_2	d_3	d_4	$d_1 + d_2 + d_3 + d_4$
1	1	1	1	4
2	1	1	1	5
1	2	2	1	5
1	1	2	1	5
1	1	1	2	5

$$(d_1=1, d_2=1, d_3=1, d_4=1), \quad (d_1=2, d_2=1, d_3=1, d_4=1), \quad (d_1=1, d_2=2, d_3=1, d_4=1),$$

$$(d_1=1, d_2=1, d_3=2, d_4=1) \quad (d_1=1, d_2=1, d_3=1, d_4=2) \quad p(A_1) = \frac{5}{1296} = 0,0039$$

- Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?

E_2 = il prodotto dei 4 numeri di ciascuna faccia dei dadi in ciascun lancio è multiplo del 3

$$p(E_2) = p(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 3k) \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

$\bar{E}_2$ = nel lancio dei 4 dadi il prodotto non è multiplo del 3

I casi favorevoli sono $4^4 = 256$ e la sua probabilità vale: $p(\bar{E}_2) = \frac{4^4}{1296} = \frac{256}{1296}$

$$p(E_2) = p(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 3k) = 1 - p(\bar{E}_2) = 1 - \frac{256}{1296} = \frac{1040}{1296} = \frac{65}{81} = 0,802$$

- Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

E_3 = il **massimo numero uscito** è 4 = almeno la faccia di un dado presenta il numero 4 e le facce degli altri dadi non presentano né il numero 5 né il numero 6.

A = i **numeri usciti sono tutti minori o uguali a 4** = a lancio avvenuto la faccia di ciascuno dei 4 dadi presenta il numero 1, o il numero 2, o il numero 3 o il numero 4.

I casi favorevoli sono le disposizioni con ripetizione di 4 elementi di classe 4:

$$D'_{4,4} = 4^4 = 256 \quad p(A) = \frac{4^4}{6^4} = \frac{256}{1296}$$

B = tutti i numeri delle facce dei dadi presentano numeri minori o uguali a 3

I casi favorevoli sono le disposizioni con ripetizione di 4 elementi di classe 3:

$$D'_{4,3} = 3^4 = 81 \quad p(B) = \frac{3^4}{6^4} = \frac{81}{1296}$$

I casi favorevoli all'evento E_3 sono: $4^4 - 3^4$ cioè quando almeno la faccia di un dado presenta il numero 4 - tutti i numeri delle facce dei dadi presentano numeri minori o uguali a 3

$$p(E_3) = p(A-B) = \frac{256}{1296} - \frac{81}{1296} = \frac{175}{1296} = 0,135$$

Altra risoluzione

Il **problema delle prove ripetute** si presenta quando consideriamo un evento **E** che ha probabilità **p** costante di verificarsi in qualsiasi prova effettuata e vogliamo calcolare la probabilità che ha tale evento (detto anche **successo**) di verificarsi **h** su **n** prove effettuate e di non verificarsi $n-h$ volte nel caso di **insuccesso**, con $0 \leq h \leq n$.

$$p_{n,h}(E) = \binom{n}{h} \cdot p^h \cdot q^{n-h} = \frac{n!}{h!(n-h)!} \cdot p^h \cdot q^{n-h}$$

$p_{n,h}(E)$ = probabilità che l'evento **E** si verifichi **h** volte in **n** prove = probabilità che in **n** prove si abbiano **h successi** ed **n-h insuccessi**.

Lanciare 4 dadi equivale a lanciare un dado quattro volte di seguito, equivale ad affermare che si sono effettuate 4 prove.

L'evento E_3 = il **massimo numero uscito** è 4 = almeno la faccia di un dado presenta il numero 4 e le facce degli altri dadi non presentano né il numero 5 né il numero 6 cioè presentino uno dei tre seguenti numeri 1,2,3

Tale evento può essere considerato come la somma dei seguenti 4 eventi fra loro incompatibili:

$$A_1 = \text{ogni dado presenta il numero 4} \quad n=4 \quad h=4 \quad n-h=0 \quad p=\frac{1}{6} \quad p(A_1) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

A_2 = un dado presenta il numero 4, gli altri tre dadi presentano uno dei tre seguenti numeri 1,2,3

$$n=4 \quad h=1 \quad 4-1=3 \quad p=\frac{1}{6} \quad q=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad p(A_2) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^3$$

A_3 = due dadi presentano il numero 4, gli altri due dadi presentano uno dei tre seguenti numeri 1,2,3

$$n=4 \quad h=2 \quad 4-2=2 \quad p=\frac{1}{6} \quad q=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad p(A_3)=\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2$$

A_4 = tre dadi presentano il numero 4, il quarto dado presenta uno dei tre seguenti numeri 1, 2, 3

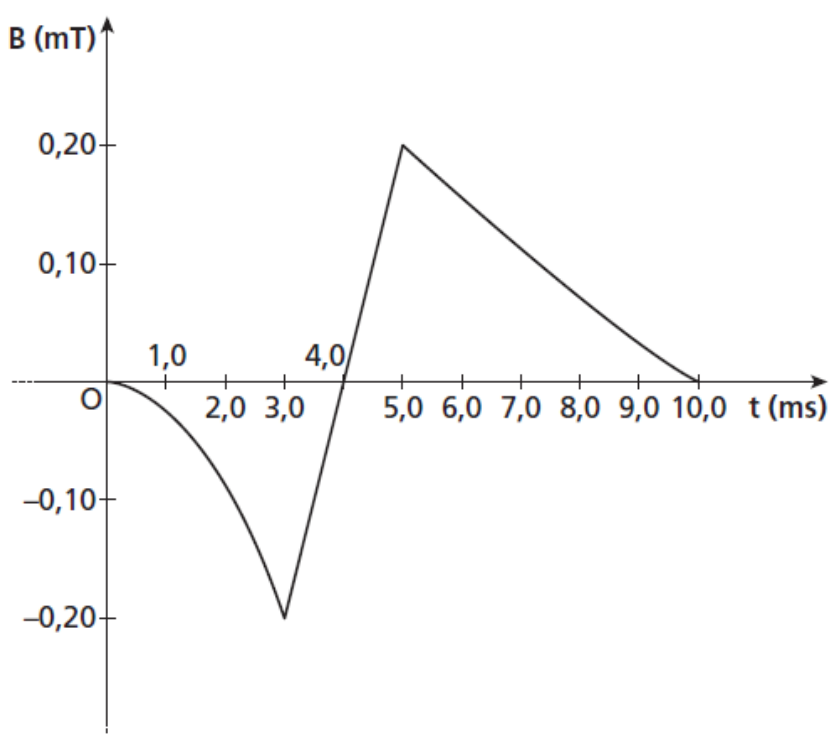
$$n=4 \quad h=3 \quad 4-3=1 \quad p=\frac{1}{6} \quad q=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad p(A_4)=\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^1$$

$$p(A_3)=p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)=p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)+p(A_4)$$

$$p(A_3)=\binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^1$$

$$p(A_3)=\frac{1}{6^4} + 4 \cdot \frac{27}{6^4} + 6 \cdot \frac{9}{6^4} + 4 \cdot \frac{3}{6^4} = \frac{1+108+54+12}{1296} = \frac{175}{1296}$$

6 Una spira di rame, di resistenza $R=4,0 \text{ m}\Omega$, racchiude un'area di $S=30 \text{ cm}^2$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della sfera. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura.



Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:

(a) da 0,0 ms a 3,0 ms (b) da 3,0 ms a 5,0 ms (c) da 5,0 ms a 10 ms

$$R = 4 \text{ m}\Omega = 4 \cdot 10^{-3} \Omega \quad S = 30 \text{ cm}^2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad \Delta\Phi = S \cdot \Delta B$$

• L'**induzione elettromagnetica** è quel fenomeno scoperto da Faraday nel 1831 in base al quale una variazione nel tempo del flusso del vettore $\vec{B}$ concatenato con un circuito genera in esso una **corrente indotta**.

L'**induzione elettromagnetica** è governata da due leggi: la **legge di Faraday-Newman** e la **legge di Lenz**. La **legge di Faraday-Newman** afferma che la **f.e.m.** indotta è direttamente proporzionale alla variazione di flusso del vettore $\vec{B}$ $[\Delta\Phi(\vec{B})]$ concatenato col circuito ed inversamente proporzionale al tempo Δt in cui tale variazione si verifica:

$$f = \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = \frac{\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B})}{t_f - t_i} = \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

La **legge di Lenz** afferma che la corrente indotta $\mathcal{J} = \frac{f}{R}$ produce un campo magnetico che si oppone alla causa che ha generato la corrente stessa.

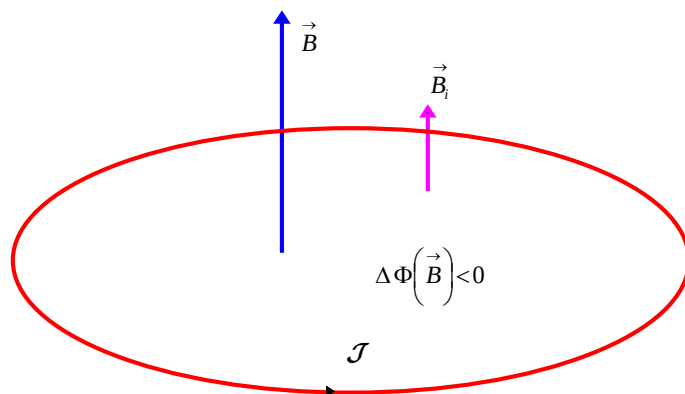
Questo significa che se la **f.e.m.** indotta ε è generata da un **aumento (diminuzione)** del $\Phi(\vec{B})$

concatenato col circuito, la **corrente indotta** $\mathcal{J}$ genera un campo magnetico indotto $\vec{B}_i$ che fa **diminuire (aumentare)** il $\Phi(\vec{B})$.

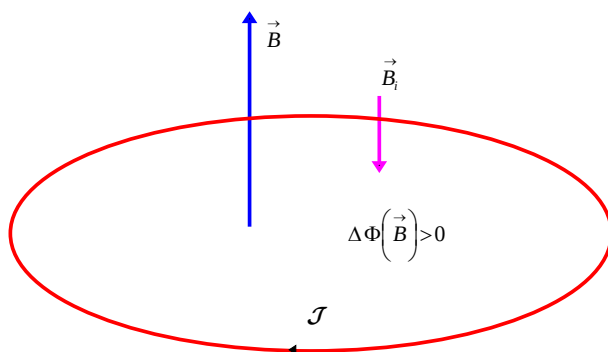
Le due leggi scritte contemporaneamente assumono la forma:

$$f = - \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = - \frac{\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B})}{t_f - t_i} = - \frac{\Phi_i(\vec{B}) - \Phi_f(\vec{B})}{t_f - t_i} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

che rappresenta la legge di **Lenz-Faraday-Newmann**.



Se il flusso del campo magnetico diminuisce ($\Delta\Phi(\vec{B}) < 0$) la corrente indotta $\mathcal{J}$ deve generare un campo magnetico indotto $\vec{B}_i$ che si oppone alla variazione di tale flusso. Questo significa che il campo magnetico indotto $\vec{B}_i$ deve avere lo stesso verso del campo magnetico $\vec{B}$ in modo da rallentare la diminuzione del flusso del vettore $\vec{B}$.



Se il flusso del campo magnetico aumenta ($\Delta\Phi(\vec{B}) > 0$) la corrente indotta $\mathcal{J}$ deve generare un campo magnetico indotto $\vec{B}_i$ che si oppone alla variazione di tale flusso. Questo significa che il campo magnetico indotto $\vec{B}_i$ deve avere verso rispetto al campo magnetico $\vec{B}$ in modo da rallentare l'aumento del flusso del vettore $\vec{B}$.

(a) da $0,0\text{ ms}$ a $3,0\text{ ms}$ $R = 4\text{ m}\Omega = 4 \cdot 10^{-3} \Omega$ $S = 30\text{ cm}^2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

$$\Delta t = 3\text{ ms} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad \Delta\Phi = S \cdot \Delta B$$

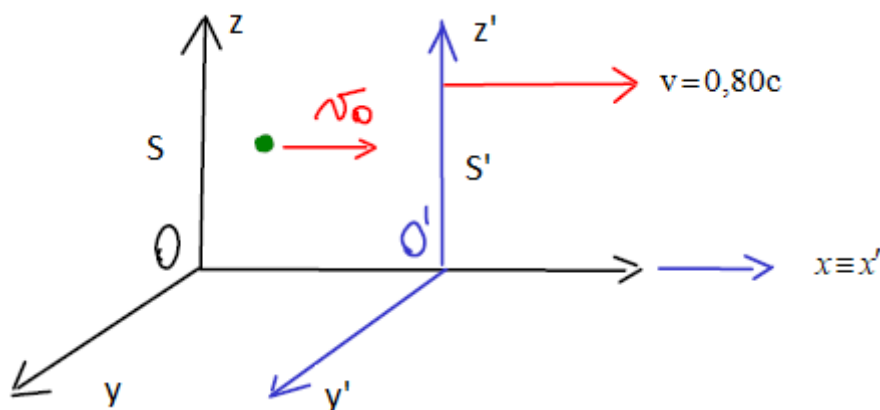
$$i = \frac{S \cdot (B_i - B_f)}{R \cdot (t_f - t_i)} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot (0,2 \cdot 10^{-3})}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = \frac{0,2}{4} = 0,05 \text{ A} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

(b) da 3,0 ms a 5,0 ms
$$i = \frac{S \cdot (B_i - B_f)}{R \cdot (t_f - t_i)} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot (-0,2 - 0,2) \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3} \cdot (5 - 3) \cdot 10^{-3}} = \frac{3 \cdot -0,4}{4 \cdot 2} = -\frac{1,2}{8} = -0,15 A$$

(c) da 5,0 ms a 10 ms
$$i = \frac{S \cdot (B_i - B_f)}{R \cdot (t_f - t_i)} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot (0,2) \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3} \cdot (10 - 5) \cdot 10^{-3}} = \frac{0,6}{20} = 0,03 A = 3 \cdot 10^{-2} A$$

7 In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo $2 ns$ percorre una distanza di $25 cm$. Una navicella passa con velocità $v = 0,80c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

$$\Delta t = 2 ns = 2 \cdot 10^{-9} s \quad d = 25 cm = 2,5 \cdot 10^{-1} m \quad v = 0,80c = \frac{4}{5}c$$



Siano S ed S' due sistemi di riferimento inerziali rispetto ai quali uno stesso evento è caratterizzato rispettivamente dalle coordinate spazio-temporali (x, y, z, t) e (x', y', z', t') .

Supponiamo che nell'istante iniziale $t = t' = 0$ gli assi cartesiani siano coincidenti e che il sistema S' sia in moto verso destra rispetto ad S con velocità avente modulo v .

Se la velocità $\mathbf{v}$ è sufficientemente piccola rispetto alla velocità della luce, allora possiamo

applicare le seguenti trasformazioni di Galileo:
$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Se la velocità $\mathbf{v}$ è confrontabile con la velocità della luce, allora dobbiamo applicare le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$\mathbf{v}$ = velocità di S' rispetto ad S
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25-16}{25}}} = \frac{5}{3}$$

$$v_m = v_o = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2,5 \cdot 10^{-1}}{2 \cdot 10^{-8}} = 1,25 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = \frac{5}{12} c$$
 = velocità media della particella rispetto al sistema S

$$v = 0,8c = 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2,4 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$
 = velocità della navicella rispetto al sistema S

Componendo relativisticamente possiamo calcolare la velocità v'_m che un osservatore solidale con la navicella attribuisce alla particella:

$$v'_m = \frac{v_m - v}{1 - \frac{v_m \cdot v}{c^2}} = \frac{\frac{5}{12}c - \frac{4}{5}c}{1 - \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{5}c^2}{c^2}} = \frac{\frac{5}{12} - \frac{4}{5}}{1 - \frac{1}{3}} c = -\frac{23}{40}c = -0,57 \cdot 2,998 \cdot 10^8 = -1,7 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Nel sistema di riferimento S' la particella si muove nel verso opposto rispetto all'asse x del sistema S

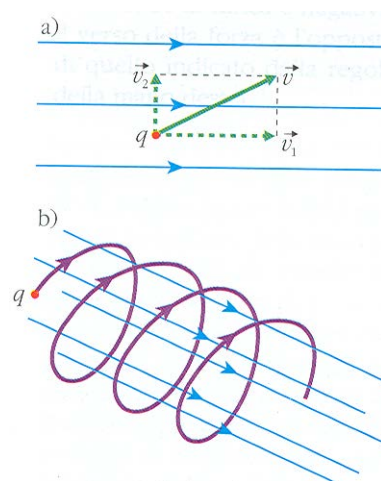
$$x' = \gamma(d - vt) = \frac{5}{3} \left(0,25 - \frac{4}{5} c \cdot 2 \cdot 10^{-9} \right) = -0,38m$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vd}{c^2} \right) = \frac{5}{3} \left(2 \cdot 10^{-9} - \frac{\frac{4}{5} c \cdot 0,25}{c^2} \right) = \frac{5}{3} \left(2 \cdot 10^{-9} - \frac{1}{5c} \right) = 2,2 \cdot 10^{-9} s$$

All'interno della navicella il tempo misurato è $t' = 2,2 \cdot 10^{-9} s$, la distanza misurata è:

$$|x'| = |-0,38m| = 0,38m$$

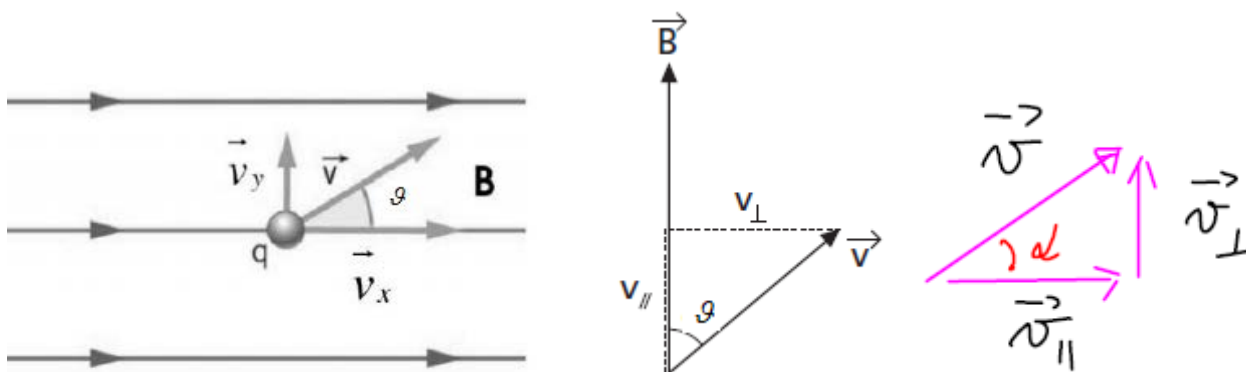
8 Un protone penetra in una regione di spazio nella quale è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ di modulo $|\vec{B}| = B = 1,00mT$. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria a elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38,1cm$, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10,5cm$ e di un moto rettilineo uniforme.



Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$.

$$B = 1mT = 10^{-3}T \quad \Delta x = 38,1cm = 0,381m \quad r = 10,5cm = 0,105m$$

Quando il protone attraversa la regione sede del campo magnetico $\vec{B}$ costante si muove lungo una traiettoria elicoidale con una velocità $\vec{v}$ che forma un angolo ϑ col vettore $\vec{B}$. Decomponiamo la velocità vettoriale $\vec{v}$ in due componenti; una, $\vec{v}_{||} = \vec{v}_x$, parallela al vettore $\vec{B}$; l'altra, $\vec{v}_{\perp} = \vec{v}_y$, perpendicolare al vettore $\vec{B}$. Il protone mentre ruota in un piano perpendicolare al campo magnetico $\vec{B}$ per effetto della velocità $\vec{v}_{\perp} = \vec{v}_y$ compie anche una traslazione parallela a $\vec{B}$ a causa della presenza della velocità $\vec{v}_{||} = \vec{v}_x$. In definitiva il protone, mentre ruota con moto circolare uniforme intorno alla direzione del vettore $\vec{B}$ trasla contemporaneamente con moto rettilineo uniforme lungo la direzione del vettore $\vec{B}$ descrivendo un'elica cilindrica con asse parallelo al campo magnetico $\vec{B}$. Quando il protone compie un giro completo nel tempo T percorre, nello stesso tempo, il tratto $\Delta x = 38,1cm = 0,381m$ con velocità $\vec{v}_{||} = \vec{v}_x$ costante. Risulta: $\vec{v}_{||} = \vec{v}_x = \frac{\Delta x}{T}$



Il moto circolare uniforme è generato dalla forza di Lorentz $\vec{f} = e \vec{v}_\perp \wedge \vec{B}$ il cui modulo vale:

$$f = e \cdot v_\perp \cdot B \cdot \sin 90^\circ = e \cdot v_\perp \cdot B$$

La forza di Lorentz è una forza centripeta e vale: $f = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v_\perp^2}{r}$

$$e v_\perp B = \frac{m_p v_\perp^2}{r} \quad r = \frac{m_p v_\perp}{e B} \quad v_\perp = \frac{r \cdot e \cdot B}{m_p} \quad v_\perp = \omega r = \frac{2\pi}{T} \cdot r \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T} \cdot r = \frac{r \cdot e \cdot B}{m_p} \quad T = \frac{2\pi m_p}{e \cdot B} \quad v_\parallel = v_x = \frac{\Delta x}{T} \Rightarrow v_\parallel = v_x = \frac{\Delta x \cdot e \cdot B}{2\pi m_p}$$

$$v_\parallel = \frac{(0,381) \cdot (1,602 \cdot 10^{-19}) \cdot 10^{-3}}{6,28 \cdot 1,673 \cdot 10^{-27}} \sim 5,81 \cdot 10^3 \frac{m}{s} \quad v_\perp = \frac{(0,105) \cdot (1,602 \cdot 10^{-19}) \cdot 10^{-3}}{1,763 \cdot 10^{-27}} \sim 1,01 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

$$v = \sqrt{v_\parallel^2 + v_\perp^2} = \sqrt{(5,81 \cdot 10^3)^2 + (1,01 \cdot 10^4)^2} = 1,17 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

$$v = \sqrt{v_\parallel^2 + v_\perp^2} = \frac{e B}{m_p} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)^2} = \frac{(1,602 \cdot 10^{-19}) \cdot 10^{-3}}{1,673 \cdot 10^{-27}} \sqrt{(0,105)^2 + \left(\frac{0,381}{628}\right)^2} \sim 1,17 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

$$v_\perp = v_\parallel \cdot \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{v_\perp}{v_\parallel} = \frac{1,01 \cdot 10^4}{5,81 \cdot 10^3} = \frac{10,1}{5,81} = 1,738 \quad \alpha = \arctg 1,738 \sim 60,1^\circ$$

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} C \quad m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} kg \quad c = 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$