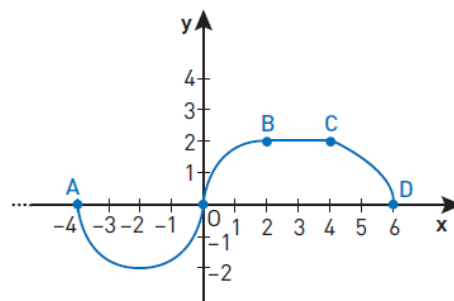


PROBLEMA 1

Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[-4, 6]$. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato, passa per i punti $A(-4; 0)$, $O(0; 0)$, $B(2; 2)$, $C(4; 2)$, $D(6; 0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro AO , dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B , del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x .



1. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A , O , B , C , D .
2. Posto $f(x) = \int_{-4}^x g(t)dt$, si calcolino: $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$.
3. Per quali valori di $x \in [-4, 6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?
4. La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$.

L'espressione analitica della funzione $g(x)$ è la seguente:

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x^2 - 4x} & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{-x^2 + 4x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ \sqrt{12 - 2x} & \text{se } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Equazione della circonferenza di diametro AO :

$$(x+2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x = 0 \Rightarrow y^2 = -x^2 - 4x \Rightarrow y = -\sqrt{-x^2 - 4x} \text{ in quanto la}$$

semicirconferenza è situata nel terzo quadrante.

L'arco $\widehat{OB}$ è $\frac{1}{4}$ della circonferenza di centro $(2; 0)$ e raggio $r=2$. La sua equazione è:

$(x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ in quanto l'arco $\widehat{OB}$ è situato nel primo quadrante.

Il segmento BC , situato nel primo quadrante, ha equazione: $y = 2$

L'arco $\widehat{CD}$ appartiene alla parabola γ , simmetrica rispetto all'asse x , la cui equazione è del tipo:

$$x = ay^2 + c$$

$D(6;0) \in \gamma \Rightarrow c = 6$ $C(4;2) \in \gamma \Rightarrow 4 = 4a + 6$ $a = -\frac{1}{2}$ $\gamma: x = -\frac{1}{2}y^2 + 6$ $y = \sqrt{-2x + 12}$ in quanto L'arco $\widehat{CD}$ è situato nel primo quadrante.

1. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A, O, B, C, D .

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}} & \text{se } -4 < x < 0 \\ \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}} & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{se } 2 < x < 4 \\ \frac{-1}{\sqrt{-2x+12}} & \text{se } 4 < x < 6 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -4^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}} = -\infty \Rightarrow$ la funzione $g(x)$ non è derivabile nel punto A

$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = +\infty$ la funzione $g(x)$ non è derivabile nel punto O

$\lim_{x \rightarrow 2} g'(x) = 0$ la funzione $g(x)$ è derivabile nel punto B

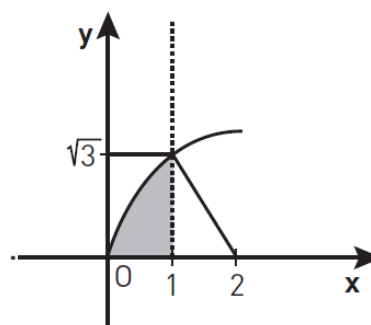
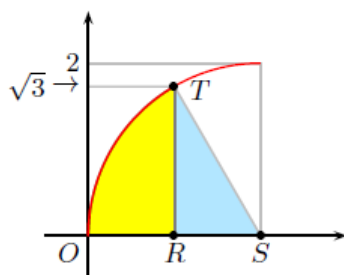
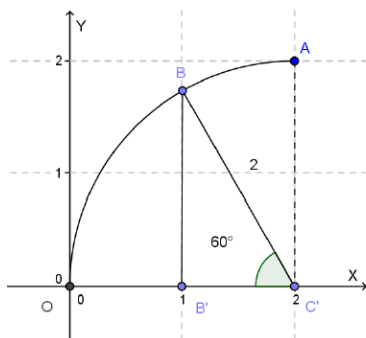
$\lim_{x \rightarrow 6^-} g'(x) = -\infty$ la funzione $g(x)$ non è derivabile nel punto D

2. Posto $f(x) = \int_{-4}^x g(t)dt$, si calcolino: $f(-4), f(0), f(1), f(2), f(4), f(6)$.

$f(-4) = \int_{-4}^{-4} g(t)dt = 0$ $f(0) = \int_{-4}^0 g(t)dt = -2\pi$ in quanto rappresenta l'area, presa col segno meno, del semicerchio di diametro $AO = 4$.

$$f(1) = \int_{-4}^1 g(t) dt = \int_{-4}^0 g(t) dt + \int_0^1 g(t) dt = -2\pi + \text{area}(\widehat{OBB'}) = -2\pi + \text{area}(\widehat{OBC'}) - \text{area}(C'BB')$$

$$f(1) = -2\pi + \frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$f(2) = \int_{-4}^2 g(t) dt = \int_{-4}^0 g(t) dt + \int_0^2 g(t) dt = -2\pi + \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = -\pi \text{ uguale ad } \frac{1}{4} \text{ di un cerchio di raggio } r=2$$

$$f(4) = \int_{-4}^4 g(t) dt = \int_{-4}^2 g(t) dt + \int_2^4 g(t) dt = -\pi + 2 \cdot 2 = 4 - \pi$$

$$f(6) = \int_{-4}^6 g(t) dt = \int_{-4}^4 g(t) dt + \int_4^6 g(t) dt = 4 - \pi + \int_4^6 \sqrt{12-x} dx = 4 - \pi + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} - \pi$$

$$\int \sqrt{12-x} dx = -\frac{1}{2} \int (12-2x)^{\frac{1}{2}} d(12-2x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(12-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{(12-2x)^3}}{3}$$

$$\int_{-4}^4 \sqrt{12-x} dx = -\frac{1}{3} \left[\sqrt{(12-2x)^3} \right]_{-4}^4 = \frac{8}{3}$$

L'integrale $\int_4^6 \sqrt{12-x} dx$ è uguale all'area del segmento parabolico CD che si può calcolare anche applicando la regola di Archimede. Basta moltiplicare per $\frac{2}{3}$ l'area del quadrato circoscritto.

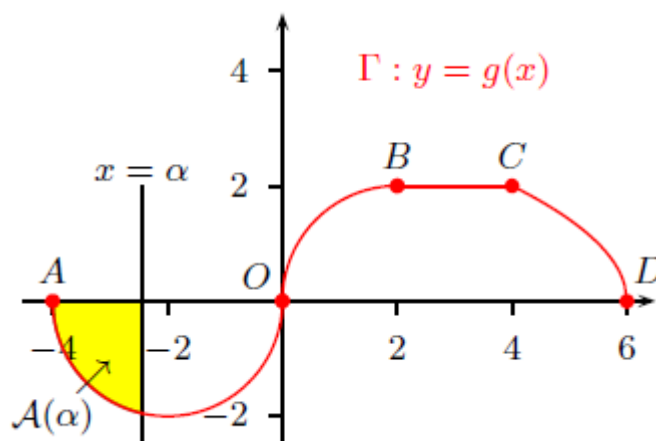
$$\text{Otteniamo: } \frac{2}{3} \cdot 2^2 = \frac{8}{3}$$

3. Per quali valori di $x \in [-4, 6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?

Poiché $f(x) = \int_{-4}^x g(t) dt$ rappresenta la misura algebrica dell'area di un trapezoide, per studiare il suo segno dobbiamo analizzare l'andamento di tale area dal valore $x=4$ al valore $x=6$ utilizzando i valori calcolati in precedenza.

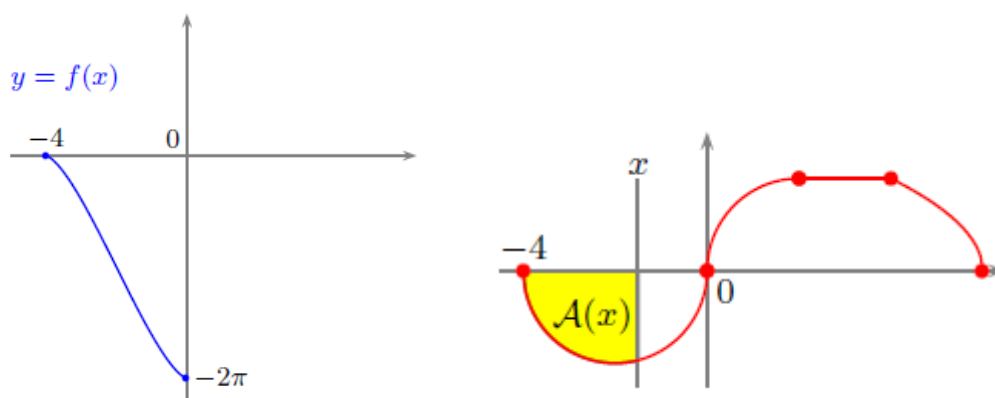
Pertanto per studiare l'andamento qualitativo di tale area dobbiamo analizzare come varia l'area $A(\alpha)$ della regione finita di piano compresa tra la curva Γ , l'asse x e la retta di equazione $x=\alpha \in [-4; 6]$.

Curva Γ , area $A(\alpha)$ variabile del trapezoide e retta variabile di equazione $x=\alpha$



Nell'intervallo $[-4; 0]$ abbiamo: $A(\alpha) = A(x)$, $f(x) = -A(x)$

Questo ci consente di affermare che la funzione $f(x) = \int_{-4}^x g(t) dt$, in tale intervallo, è negativa e decrescente in quanto passa dal valore $f(x) = 0$ al valore $f(x) = -2\pi$. Il suo andamento è quello indicato in figura:



Nell'intervallo $]0;2]$, dove $g(x)$ è positiva, l'area $A(x)$ va sommata e quindi $f(x)$ è crescente e negativa in quanto risulta $f(2) = -A(0) + A(2) = -\pi$

Il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è quello indicato in figura:

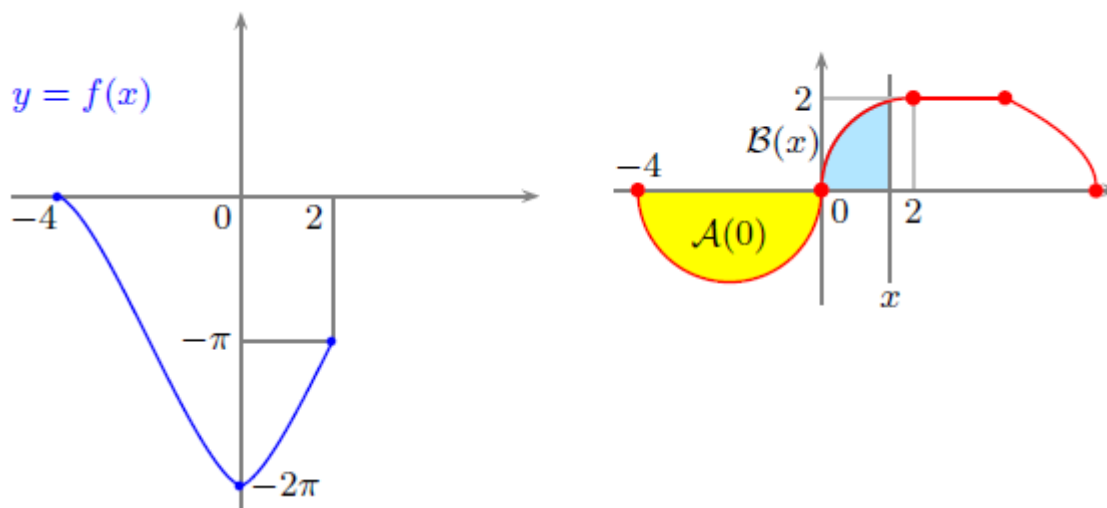


Grafico qualitativo della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-4;2]$

Nell'intervallo $]2;4]$ abbiamo: $f(x) = -A(0) + A(2) + C(x)$ dove $C(x)$ rappresenta l'area di un rettangolo avente base $b = x - 2$ ed altezza $h = 2$ essendo $2 < x \leq 4$. $C(x) = 2(x - 2) = 2x - 4$

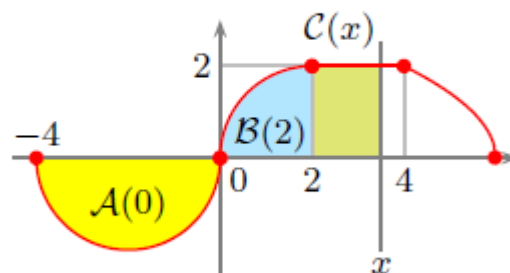
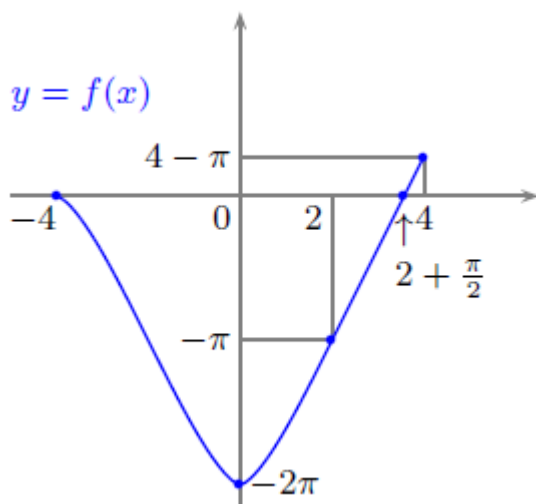
$f(4) = 4 - \pi > 0 \Rightarrow f(x)$ si annulla in un punto x tale che si abbia: $f(x) = 0 \Rightarrow$

$$-\pi + 2x - 4 = 0 \quad x = 2 + \frac{\pi}{2}$$

Nell'intervallo $[2;4]$ il grafico della funzione $f(x)$ è il segmento che congiunge i punti $(2; f(2)) \equiv (2; -\pi)$, $(4; f(4)) \equiv (4; 4 - \pi)$.

Si tratta di una funzione crescente e negativa se $2 < x < 2 + \frac{\pi}{2}$, crescente e positiva se $2 + \frac{\pi}{2} < x < 4$

Nell'intervallo $[-4;4]$ il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è quello indicato in figura:



Per $x \in]4; 6]$ abbiamo: $f(x) = -A(0) + A(2) + A(4) + A(6) = f(6) = \frac{20}{3} - \pi \approx 3,5$

Si tratta di una funzione crescente e positiva.

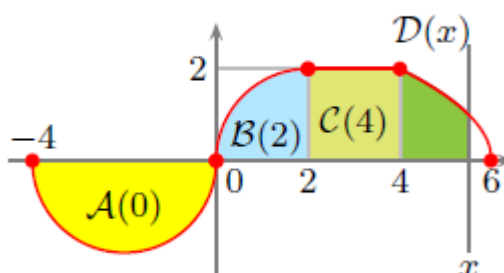
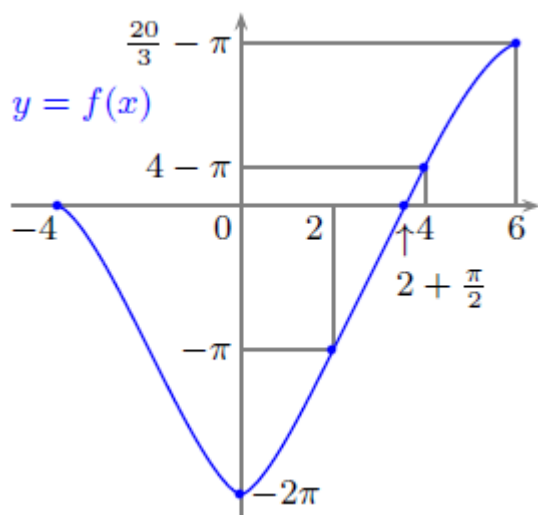


Grafico qualitativo della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-4; 6]$

Concludendo possiamo affermare che:

$$f(x) < 0 \text{ se } -4 \leq x \leq 2 + \frac{\pi}{2} \quad f(x) > 0 \text{ se } 2 + \frac{\pi}{2} < x \leq 6 \quad f(x) = 0 \text{ se } x = -4 \vee x = 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = g(x) \quad f''(x) = g'(x) \Rightarrow$$

$$f''(x) = g'(x) < 0 \text{ se } -4 < x < -2 ; 4 < x < 6$$

$$f''(x) = g'(x) > 0 \text{ se } -2 < x < 0 ; 0 < x < 2 \quad f''(0) = g'(0) \text{ non esiste}$$

$$f''(x)=g'(x)=0 \text{ se } 2 < x < 4$$

4. La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$.

La funzione $f(x)$ presenta un **minimo assoluto** nel punto $x=0$ e tale minimo vale $f(0)=-2\pi$; presenta un **massimo assoluto** nel punto $x=6$ e tale massimo vale

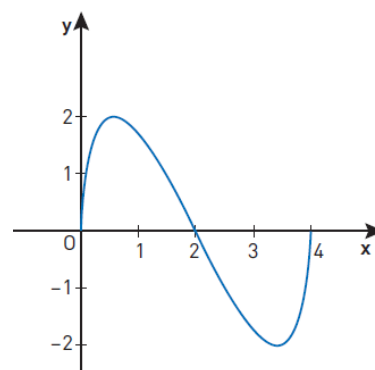
$$f(6)=\frac{20}{3}-\pi.$$

PROBLEMA 2

Sia $f(x) = (2-x)\sqrt{4x-x^2}$

1. A lato è disegnato il grafico Γ di $f(x)$. Si dimostri che $(2;0)$ è centro di simmetria di Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x .

2. Si dimostri che, qualunque sia t , $0 < t < 2$, le rette tangenti a Γ nei suoi punti di ascisse $2+t$ e $2-t$ sono parallele. Esistono rette tangenti a Γ che siano parallele alla retta $21x + 10y + 31 = 0$? E che siano parallele alla retta $23x + 12y + 35 = 0$?



4. Sia $h(x) = \sin(f(x))$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte? Qual è il valore di $\int_0^4 h(x)dx$?

1. Fra le coordinate delle coppie di punti $P(x,y)$ e $P'(X,Y)$ che si corrispondono nella **simmetria centrale di centro** $C(a,b)$ sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} X = 2a - x \\ Y = 2b - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2a - X \\ y = 2b - Y \end{cases}$$

Per avere l'equazione cartesiana della curva γ' simmetrica della curva γ rispetto al punto $C(a,b)$ basta sostituire nell'equazione cartesiana $y = f(x)$ della curva γ con $2a - x$ ed y con $2b - y$

$$x \leftarrow 2a - x, \quad y \leftarrow 2b - y \quad \begin{cases} x \rightarrow 2a - x \\ y \rightarrow 2b - y \end{cases} \quad \text{Nel caso del problema proposto abbiamo: } \begin{cases} x \rightarrow 4 - x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$$

$$-y = (-2+x)\sqrt{4(4-x)-(4-x)^2} \Rightarrow y = (2-x)\sqrt{4x-x^2} = f(x)$$

Questo risultato ci consente di affermare che il punto $(2;0)$ è il centro di simmetria del grafico γ della funzione $f(x)$.

$$f'(x) = -\sqrt{4x-x^2} + \frac{(2-x)(4-2x)}{2\sqrt{4x-x^2}} = \frac{-4x+x^2+4+x^2-4x}{\sqrt{4x-x^2}} \quad f'(x) = \frac{2(x^2-4x+2)}{\sqrt{4x-x^2}}$$

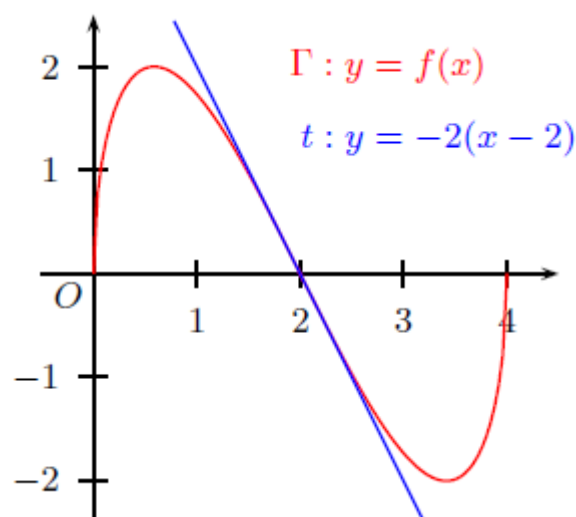
$f'(2) = -2$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente a γ nel punto di ascissa $x=2$.

Tale coefficiente angolare coincide con la tangente goniometrica dell'angolo α formato dalla retta tangente col semiasse positivo delle ascisse.

$$\operatorname{tg} \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(-2) \approx 116,5656^\circ \approx 116^\circ 34' \quad \alpha = 180^\circ - \operatorname{arctg}(2) \approx 116^\circ 34'$$

L'equazione della retta tangente a γ nel punto di ascissa $x=2$ è:

$$y = -2(x-2) \quad \mathbf{y = -2x + 4}$$



2. Per un parametro $t \in]0; 2[$ abbiamo:

$$f'(2+t) = \frac{2[(2+t)^2 - 4(2+t) + 2]}{\sqrt{4(2+t) - (2+t)^2}} = \frac{2(4+t^2+4t-8-4t+t^2)}{\sqrt{8+4t-4-t^2-4t}} = \frac{2(t^2-2)}{\sqrt{4-t^2}}$$

$$f'(2-t) = \frac{2[(2-t)^2 - 4(2-t) + 2]}{\sqrt{4(2-t) - (2-t)^2}} = \frac{2(4+t^2-4t-8+4t+t^2)}{\sqrt{8-4t-4-t^2+4t}} = \frac{2(t^2-2)}{\sqrt{4-t^2}}$$

$\forall t \in]0; 2[$ le rette tangenti alla curva Γ nei punti di ascissa $x=2+t$ e $x=2-t$ sono parallele.

Consideriamo le rette $t: 21x+10y+31=0$ $s: 23x+12y+35=0$

Risulta; $\mathbf{m_t = -\frac{21}{10} \approx -2,1}$ $\mathbf{m_s = -\frac{23}{12} \approx -1,92}$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 4x + 2)}{\sqrt{4x - x^2}} < 0 \quad \text{se } 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2} \quad \text{cioè se } 0,58 < x < 3,41$$

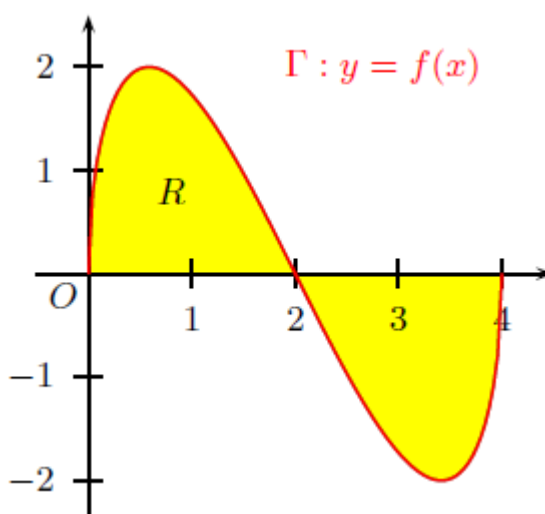
$$f'(2) = -2 \quad f'(2 - \sqrt{2}) = f'(2 + \sqrt{2}) = 0 \quad \text{Il valore } m_t = -\frac{21}{10} \approx -2,1 \text{ non si può accettare e quindi}$$

la retta t non è parallela alla curva Γ , mentre il valore $m_s = -\frac{23}{12} \approx -1,92$ si può accettare e, quindi,

la retta s è parallela alla curva Γ .

3. Si calcoli l'area S della regione compresa tra Γ e l'asse x .

$$S = 2A(R)$$



$$S = \int_0^2 (4 - 2x) \sqrt{4x - x^2} dx = \int_0^2 (4x - x^2)^{\frac{1}{2}} d(4x - x^2) = \left[\frac{(4x - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{2}{3} \left[\sqrt{(4x - x^2)^3} \right]_0^2 = \frac{2}{3} \sqrt{(8 - 4)^3}$$

$$S = \frac{16}{3}$$

4. Sia $h(x) = \sin(f(x))$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte? Qual è il valore di $\int_0^4 h(x) dx$?

$$f(x) = (2 - x)\sqrt{4x - x^2} \Rightarrow \text{dom} f = [0; 4] \quad f(1) = 2 \quad \text{e} \quad f(3) = -2 \Rightarrow \text{codom} f = [-2; 2]$$

$$h(x) = \sin f(x) = \sin(2 - x)\sqrt{4x - x^2}$$

Anche la funzione $h(x)$ è simmetrica rispetto al punto $(2; 0)$.

$$h(x) = 1 \Rightarrow \sin(2 - x)\sqrt{4x - x^2} = 1 \Rightarrow (2 - x)\sqrt{4x - x^2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

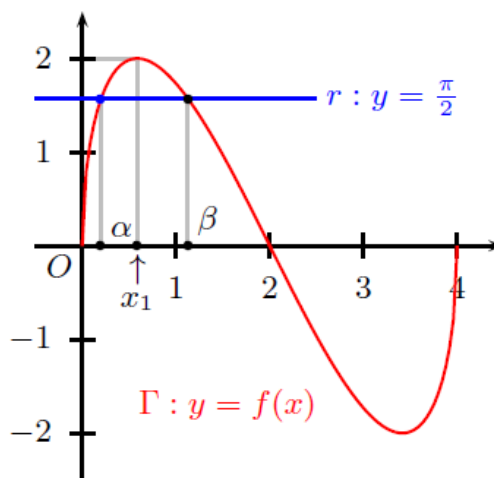
Tale equazione si riduce alla sola $(2-x)\sqrt{4x-x^2} = \frac{\pi}{2}$ in quanto sappiamo che $\text{codom} f = [-2; 2]$.

Le soluzioni di questa equazione coincidono con le ascisse dei punti di intersezione delle curve $y = (2-x)\sqrt{4x-x^2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$. Tali punti si ottengono

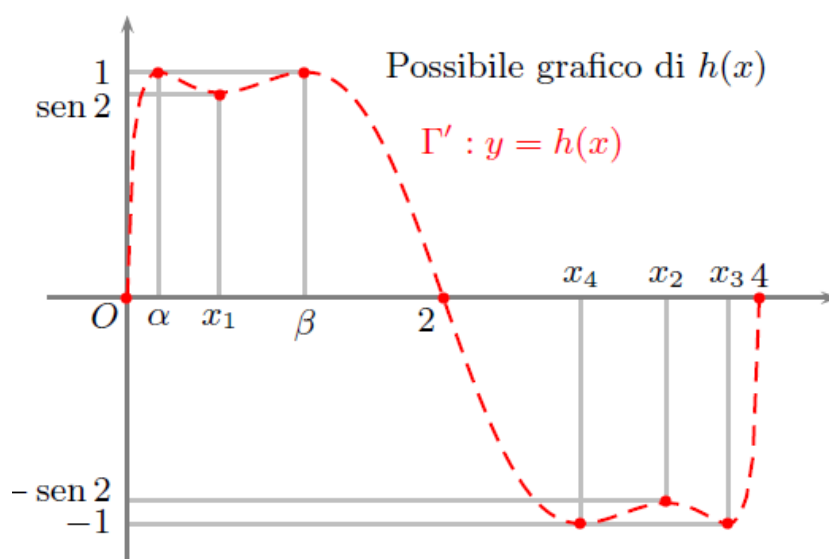
risolvendo graficamente il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = (2-x)\sqrt{4x-x^2} \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{Otteniamo due soluzioni:}$$

$$\alpha \in]0; x_1[\quad \text{e} \quad \beta \in]x_1; 2[$$



Utilizzando le informazioni precedenti, ricordando la simmetria della funzione $f(x)$ e tenendo presente che la funzione $\sin x$ è una funzione dispari, possiamo ipotizzare un grafico qualitativo come quello indicato in figura:



$$h'(x) = \cos f(x) \cdot f'(x) \quad h'(x) = 0 \Rightarrow \cos f(x) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow \cos f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = x_4 \in]2; x_2[\quad \text{e} \quad x = x_3 \in]x_2; 4[\quad \text{con} \quad h(x_3) = h(x_4) = -1 \quad \text{minimi assoluti per la funzione } h(x)$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{2}$ $x=2-\sqrt{2}$ è un punto di minimo relativo e risulta
 $h(2-\sqrt{2})=\sin 2 \approx 0,91$

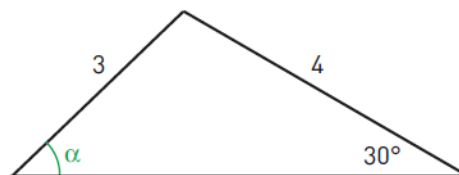
L'equazione $h(x)=k$ ha 4 soluzioni distinte se $\sin 2 < k < 1$ oppure $-1 < k < -\sin 2$ come si evince dal grafico della funzione $h(x)$.

$$\int_0^4 h(x) dx = \int_0^2 h(x) dx + \int_2^4 h(x) dx = \int_0^2 h(x) dx + \int_0^2 h(x) dx = 0$$

Infatti, la funzione $h(x)$ è simmetrica rispetto al punto $(2;0)$

Questionario

1. Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α ?



Applicando il teorema dei seni al triangolo ABC otteniamo: $\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin 30^\circ} \Rightarrow$

$$\frac{4}{\sin \alpha} = \frac{3}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_1 \arcsin \frac{2}{3} \approx 41,8103^\circ \approx 41^\circ 49' \quad \alpha_2 \approx 138^\circ 11'$$

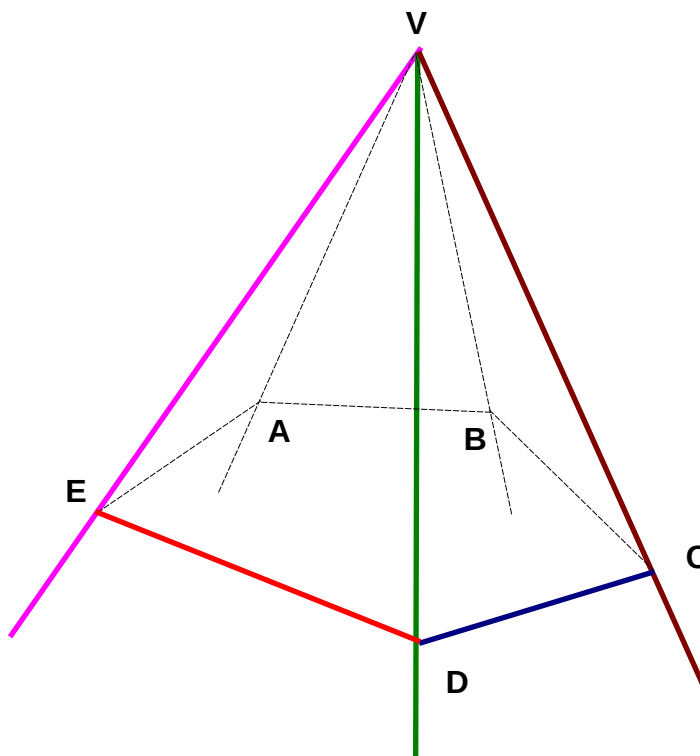
2. Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.

Poliedro		Vertici	Spigoli	Facce
tetraedro		4	6	4
cubo		8	12	6
ottaedro		6	12	8
dodecaedro		20	30	12
icosaedro		12	30	20

2. Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.

Definizione di angoloide:

Dato un poligono qualsiasi $ABCDE$ ed un qualunque punto V non appartenente al piano del poligono, si considerino gli angoli convessi $\widehat{AVB}$, $\widehat{BVC}$, $\widehat{CVD}$, $\widehat{DVE}$, $\widehat{EVA}$ formati dalle semirette che congiungono V con i successivi vertici del poligono. La superficie formata da tali angoli piani limiterà una parte di spazio che prende il nome di **angoloide**. Diversamente chiamiamo angoloide il solido costituito da tutte le semirette di origine V che passano per i punti del poligono.

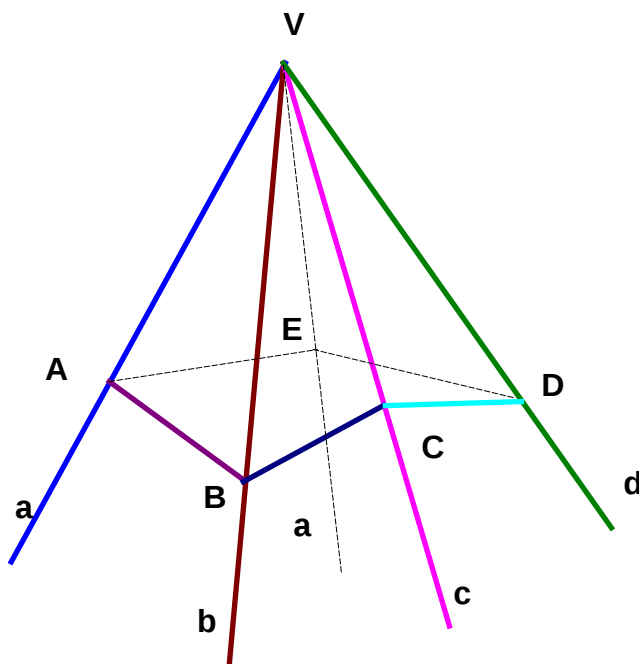


Quindi un **angoloide** è la parte di spazio delimitata da tre o più angoli a due a due consecutivi ed aventi il vertice in comune.

Il punto V si dice **vertice** dell'angoloide, le semirette VA , VB , VC , VD , VE si dicono **spigoli** dell'angoloide, gli angoli piani $\widehat{AVB}$, $\widehat{BVC}$, $\widehat{CVD}$, $\widehat{DVE}$, $\widehat{EVA}$ sono le **facce** dell'angoloide.

Un angoloide con 3, 4, 5 facce dicesi rispettivamente **triedro**, **tetraedro**, **pentaedro**.

Un angoloide si dice **convesso** o **concavo** se il poligono che serve per la sua costruzione è **convesso** o **concavo**.

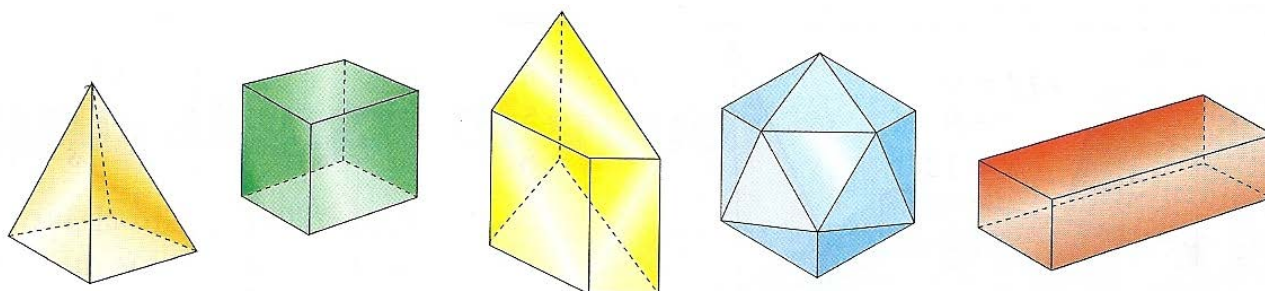


Angoloide concavo

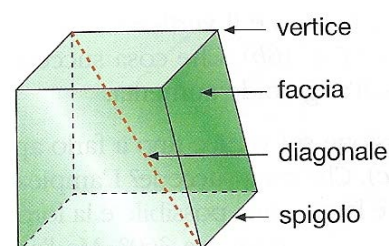
Teorema: In ogni angoloide convesso la somma delle facce è minore di quattro angoli retti

$$\widehat{BVC} + \widehat{CVD} + \widehat{DVE} + \widehat{EVA} < 360^\circ$$

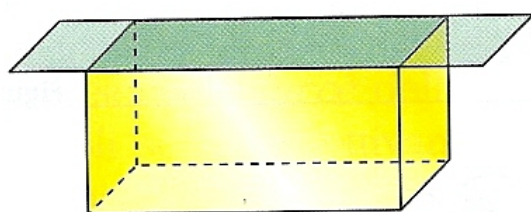
Definizione di poliedro: Dicesi **poliedro** la regione finita di spazio delimitata da un numero finito di poligoni convessi, giacenti su piani diversi ed aventi a due a due un lato in comune.



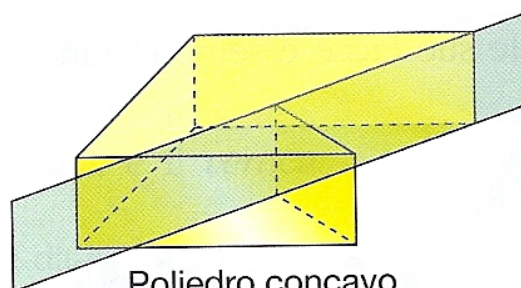
I poligoni che delimitano il poliedro, i loro vertici si chiamano rispettivamente **facce**, **vertici**, **spigoli** del poliedro. Ogni segmento che unisce due vertici non appartenenti alla stessa faccia prende il nome di **diagonale** del poliedro.



L'insieme delle facce si dice **superficie del poliedro**. Un poliedro si dice **convesso**, se ogni sua faccia appartiene ad un piano che non interseca il poliedro, si dice **concavo** se almeno una sua faccia appartiene ad un piano che interseca il poliedro.



Poliedro convesso



Poliedro concavo

Elementi caratteristici di ogni poliedro sono gli **angoli piani** (cioè gli angoli di ciascuna faccia), i **diedri** (cioè gli angoli formati dalle facce che escono da ogni spigolo), gli **angoloidi** formati dagli angoli piani i cui lati partono da uno stesso vertice.

Teorema: In ogni poliedro convesso il numero delle facce più il numero dei vertici è uguale al numero degli spigoli aumentato di due.

$$f + v = s + 2$$

Definizione: Un **poliedro** si dice **regolare** quando le **sue facce** sono poligoni regolari uguali ed i suoi **angoloidi** sono uguali fra loro.

I poligoni regolari, detti **solidi di Platone**, sono soltanto **5** in quanto le loro facce possono essere triangoli equilateri (**tetraedro**), quadrati (**cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).

Un poligono regolare non può avere come faccia un esagono in quanto avremmo come somma $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ in contrasto con quanto detto prima. E questo ci consente di affermare che non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.

Si hanno le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli equilateri: le facce dei quattro angoloidi possono essere 3 ($3 \times 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ$), 4 ($4 \times 60^\circ = 240^\circ < 360^\circ$), 5 ($5 \times 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$). Con più di 6 facce avremmo un valore $\geq 360^\circ$. Esistono tre poliedri regolari con le facce triangolari; sono il **tetraedro**, l'**ottaedro**, l'**icosaedro**.

2. Se le **facce del poliedro sono quadrate**, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 ($3 \times 90^\circ = 270^\circ < 360^\circ$). Abbiamo l'**esaedro** (**cubo**). Nel caso di 4 facce avremmo: $4 \times 90^\circ = 360^\circ$; con non possibile per quanto detto in precedenza.

3. Un poliedro con facce pentagoni regolari può avere al massimo 3 facce; risulta $3 \times 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$. Abbiamo il **dodecaedro regolare**.

3. Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità:

- esattamente una pallina è rossa;
- le tre palline sono di colori differenti.

E = la pallina estratta è rossa **E₁** = la prima pallina estratta è rossa

E₂ = la seconda pallina estratta è rossa **E₃** = la terza pallina estratta è rossa

I tre eventi **E₁**, **E₂**, **E₃** sono dipendenti in quanto la composizione dell'urna si modifica ad ogni estrazione.

$$P(E_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} = \frac{1050}{6840} = \frac{35}{228} = \text{la prima pallina estratta è rossa, la seconda pallina estratta non è}$$

rossa dopo la prima estrazione della pallina rossa, la terza pallina estratta non è rossa dopo

l'estrazione di una pallina rossa e di una pallina non rossa

$$P(E_2) = \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{14}{18} = \frac{1050}{6840} = \frac{35}{228} \quad P(E_3) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{5}{18} = \frac{1050}{6840} = \frac{35}{228}$$

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{35}{228} + \frac{35}{228} + \frac{35}{228} = \frac{105}{228} = \frac{35}{76} \approx 0,46$$

F = le tre palline stratte siano di colori differenti

F₁ = la prima pallina estratta è di un colore qualsiasi, ad esempio sia rossa **P(F₁)=1** =

F₂ = la seconda pallina estratta non è rossa e quindi è verde o gialla o bianca e sia , ad esempio

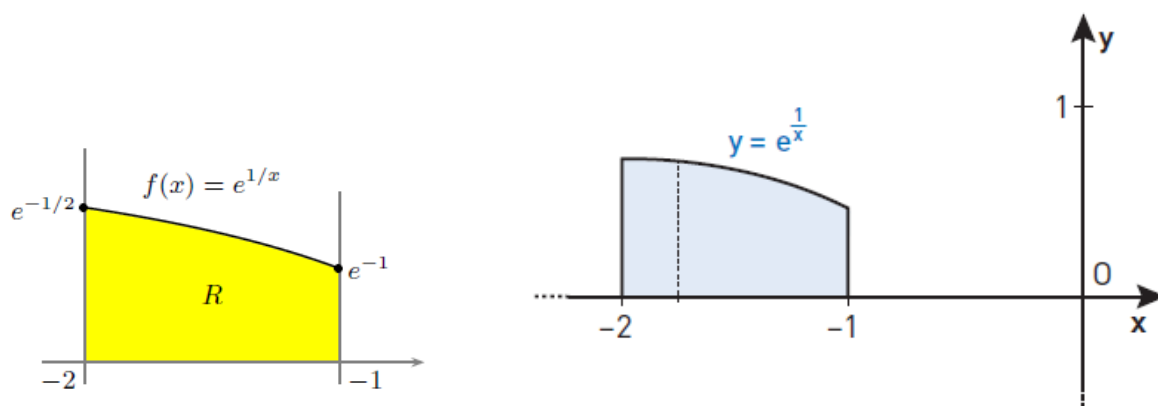
verde **P(F₂)= $\frac{15}{19}$**

F₃ = la terza pallina estratta è gialla o bianca (abbiamo escluso le palline rosse e quelle verdi)

$$P(F_3) = \frac{10}{18} \quad P(F) = P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot P(F_3) = 1 \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{10}{18} = \frac{150}{132} = \frac{25}{37} = 0,4386$$

4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = e^{1/x}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2, -1]$. In ogni punto di R di ascissa x , l'altezza del solido è data da $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.

La figura sottostante ci indica il trapezoide R individuato dalla funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ relativo all'intervallo $[-2; -1]$



Infatti, in tale intervallo, risulta; $f(x) > 0$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} < 0$ $f''(x) = \frac{2x-1}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{x}} < 0$

Il volume di questo solido si ottiene calcolando il seguente integrale definito: $V = \int_{-2}^{-1} A(x) dx$

dove $A(x)$ è l'area di una generica sezione rettangolare di base $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ed altezza $h(x) = \frac{1}{x^2}$

$$A(x) = f(x) \cdot h(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \int e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\int e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

$$V = \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\left[e^{\frac{1}{x}} \right]_{-2}^{-1} = -e^{-1} + e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} = \frac{\sqrt{e}-1}{e} \approx 0,2387$$

5. In un contesto di geometria non euclidea si illustri un esempio di triangolo i cui angoli non hanno somma 180° .

Stabilita l'indimostrabilità del V postulato di Euclide si fece strada la convinzione che era possibile costruire un'altra geometria logicamente valida, indipendente dal V postulato. Sorsero così le **geometrie non eucldee** ad opera dei matematici **Lobacevski**, **Boljai**, **Riemann**, avallate dall'indiscussa autorevolezza del grande **Gauss**.

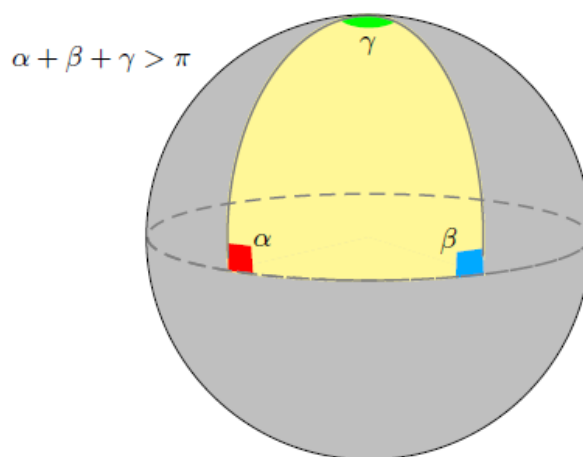
Il quinto postulato della geometria euclidea afferma l'esistenza di una sola retta parallela ad una data retta s e passante per un punto P non appartenente ad s . Se si sostituisce tale postulato con altri si possono dedurre altri tipi di geometrie tutte logicamente valide. Se si postula che da un punto

P non appartenente alla retta s non esistono rette parallele ad s otteniamo la **geometria ellittica** dove il piano è la superficie di una sfera. In questo tipo di geometria la somma degli interni di un triangolo non è costante ma può essere maggiore di un angolo piatto.

La figura ci mostra un triangolo con due angoli

retti ($\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$). In tale triangolo risulta:

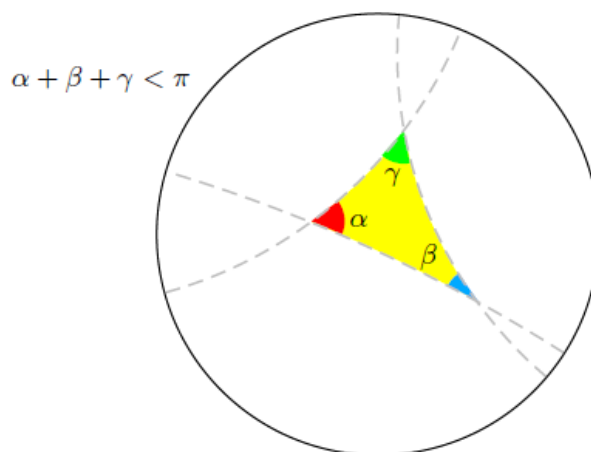
$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$



Nella **geometria iperbolica** dato un punto P ed una retta s con $P \notin s$, esistono almeno due rette passanti per P e parallele alla retta s . Nella **geometria iperbolica** la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo giro.

La figura mostra, nel piano di Poincaré, un triangolo dove la somma degli angoli interni è minore di un angolo piatto.

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$



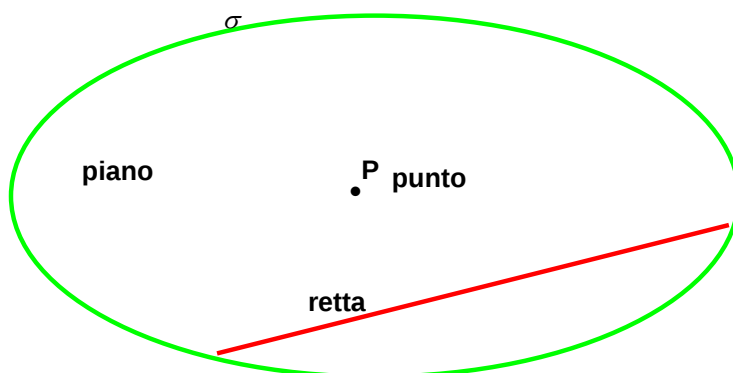
Geometria iperbolica di Lobacevskij e Bolyai ed i modelli di Klein e Poincaré

La geometria iperbolica di Lobacevskij e Bolyai si ottiene sostituendo il quinto postulato di Euclide col seguente postulato: **per un punto Q esterno ad una retta s si possono condurre due sole rette parallele ad s .**

Klein propose un modello di questa geometria in cui gli enti geometrici punto e retta soddisfano tutti gli assiomi della geometria euclidea tranne quello del quinto postulato.

Gli enti fondamentali del modello di Klein sono gli stessi enti della geometria euclidea, che vengono ribattezzati secondo il seguente schema. Klein considera una qualsiasi conica, ad esempio l'ellisse σ e :

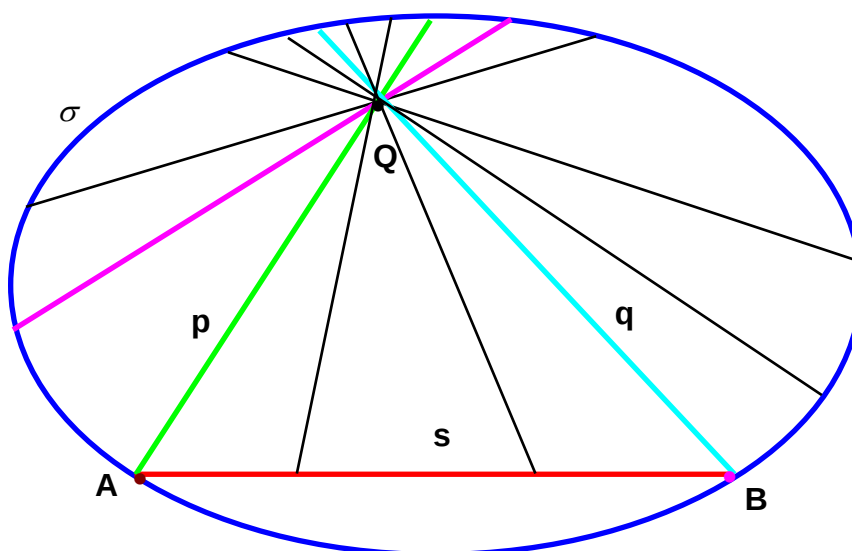
- al piano euclideo fa corrispondere la regione interna alla conica σ
- ad ogni punto euclideo fa corrispondere un punto interno di σ
- ad ogni retta euclidea fa corrispondere una corda della conica, esclusi gli estremi.



In base a questo modello due rette possono essere:

- **incidenti** se hanno in comune un punto del piano di Klein
- **parallele** se hanno in comune un punto della conica che delimita il piano di Klein
- **ultraparallele** negli altri casi

Nella figura ho disegnato due rette limite **QA** e **QB** che non intersecano la retta **AB** e che prendono il nome di **rette parallele** alla retta **AB**. Nella stessa figura esistono infinite altre rette che non incontrano la retta **AB** e sono considerate **rette non secanti** o **rette ultraparallele**.



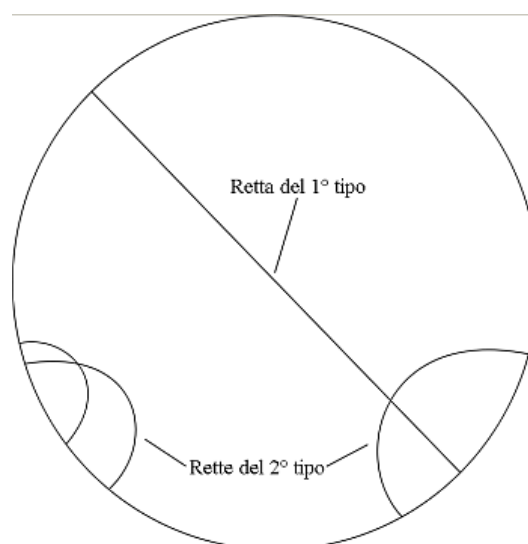
Un altro modello di geometria iperbolica è quello ideato da Poincaré.

In questo modello esistono le seguenti definizioni:

Il **piano** è l'insieme di tutti i punti interni ad una circonferenza

La **retta** è un qualsiasi diametro della circonferenza privato degli estremi, oppure un qualsiasi arco di circonferenza privato degli estremi ed ortogonale alla circonferenza che lo delimita

Il **punto** è un qualsiasi punto interno alla circonferenza



In questo modello, presa una retta del piano ed un punto non appartenente ad essa si possono tracciare infinite rette passanti per quel punto e parallele alla retta data.

Nella geometria iperbolica la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre minore di 180°

Geometria ellittica di Riemann

Nella **geometria ellittica di Riemann** il V postulato di Euclide assume la seguente formulazione: **Per un punto del piano non passa alcuna retta parallela ad una retta data.**

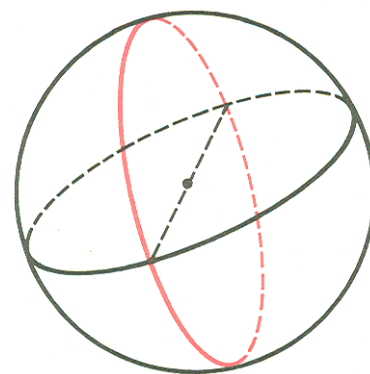
Riemann considera come **piano** una **superficie sferica**

e chiama:

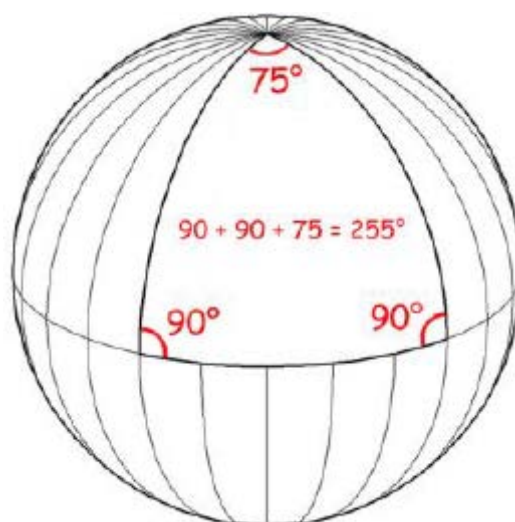
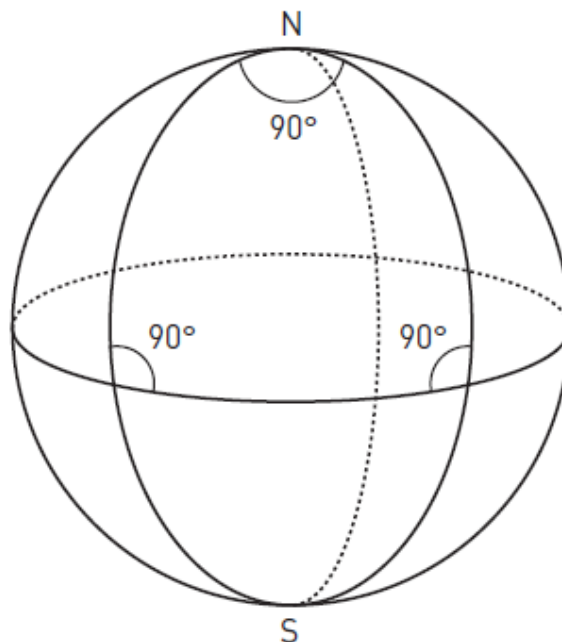
- **punto** ogni coppia di punti della sfera diametralmente opposti ,cioè gli estremi di un diametro
- **retta** ogni circonferenza massima.

In questa geometria la retta è una linea chiusa e la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore della somma di due angoli retti.

Costruiamo, nel piano di **Riemann**, un triangolo nel quale la somma dei suoi angoli interni è 270° .



Consideriamo due cerchi massimi fra loro ortogonali passanti per i punti N ed S . Consideriamo un terzo cerchio massimo ortogonali ai precedenti cerchi massimi. Otteniamo 8 triangoli uguali ognuno dei quali ha come somma degli interni 270° .



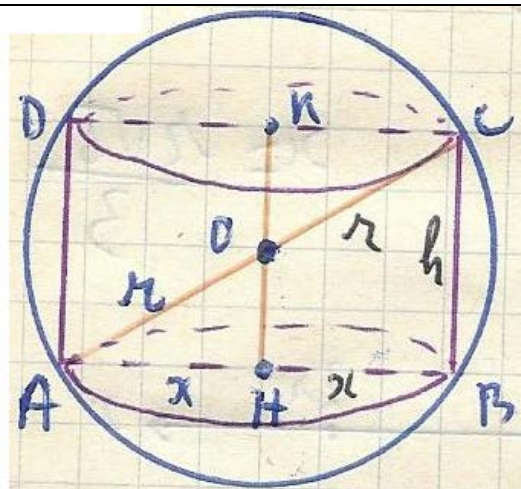
Esempio di triangolo ellittico dove la somma dei suoi angoli interni è 225°

6. Si calcolino l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $r = \sqrt{3}$.

Pongo $AH = x$ Ottengo:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$h = 2OH = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$



$$V = \pi x^2 \cdot h = 2\pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2} = 2\pi \cdot x^2 \cdot (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ con } 0 < x < r$$

$$x^2 + (r^2 - x^2) = r^2 = \text{costante} \Rightarrow V_{\max} \text{ per } x^2 = \frac{r^2 - x^2}{2} \quad x^2 = 2r^2 - 2x^2 \quad 3x^2 = 2r^2 = 6$$

$$x = \sqrt{2} \quad h = 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{3 - 2} = 2$$

Altra risoluzione

$$\text{Pongo: } h = 2x \text{ ottengo: } R = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{3 - x^2}$$

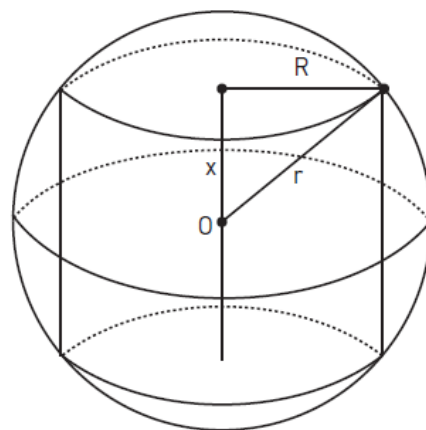
$$V(x) = \pi R^2 \cdot 2x = 2\pi x(3 - x^2) = 2\pi(x^3 - 3x)$$

Il massimo della funzione $V(x)$ coincide col massimo della

$$\text{funzione } f(x) = \frac{V}{2\pi} = -x^3 + 3x$$

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(-x^2 + 1) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0$$

$$x = 1 \quad h = 2x = 2 \quad R = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}$$



7. Se $f'(x) = \ln x - x + 2$, per quale dei seguenti valori approssimati di x , f ha un minimo relativo?

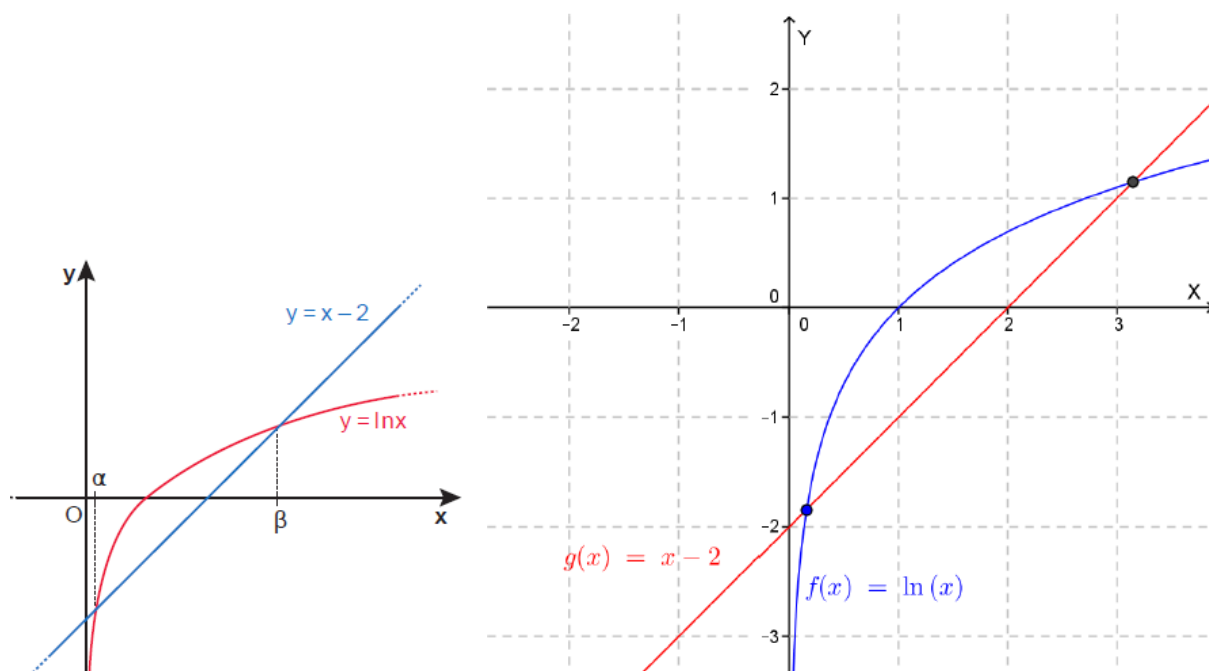
- (A) 5,146 (B) 3,146 (C) 1,000 (D) 0,159 (E) 0

I punti stazionari della funzione $f(x)$ si ottengono annullando la sua derivata $f'(x)$. Per stabilire la natura di questi punti stazionari basta studiare il segno della derivata $f'(x)$ o calcolare il valore che la $f''(x)$ assume in questi punti.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x - x + 2 = 0 \Rightarrow \ln x = x - 2$$

Le soluzioni di questa equazione coincidono con le ascisse dei punti comuni alle curve $y = \ln x$ (curva logaritmica) e $y = x - 2$ (retta).

I grafici sottostanti



Trovo i seguenti valori: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ con $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 3$

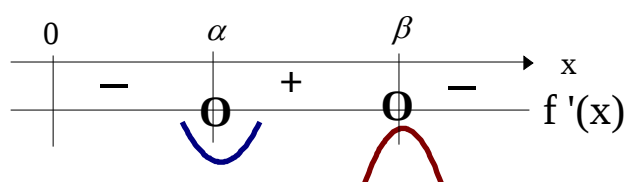
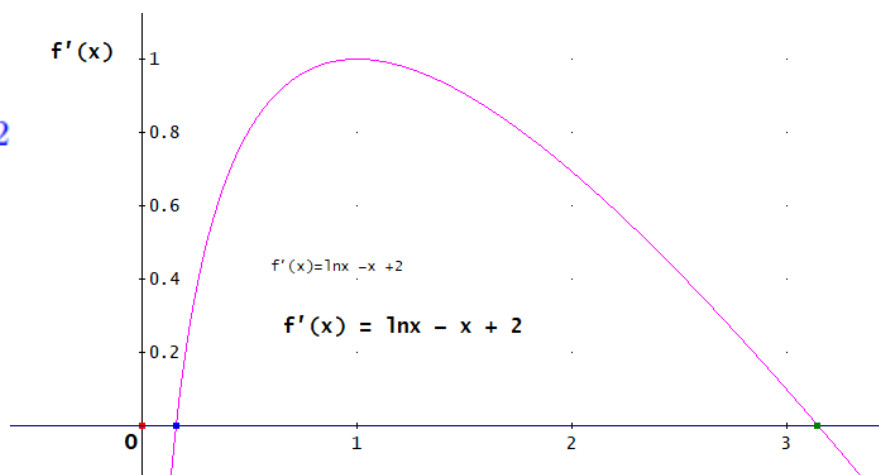
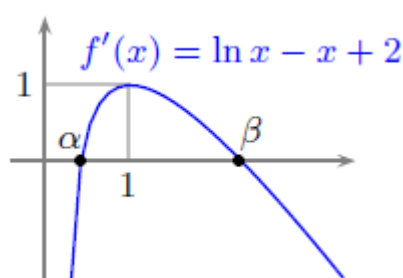


Grafico della funzione $f'(x)$.



La funzione $f(x)$ un solo **punto di minimo** $0 < \alpha < 1$. Quindi la risposta esatta è **$x = 0,159$** cioè la **(D)**.

8. La “zara” è un gioco d’azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella *Divina Commedia* – e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10.

La parola **zara** significa gioco. Si tratta di un gioco d’azzardo in uso nel Medioevo. Si gioca con tre dadi: a turno ogni giocatore chiama un numero da 3 a 18. Vince chi per primo ottiene il punteggio uguale al numero chiamato.

N	prob.	%	N	prob.	%
3	1/216	0.46%	11	27/216	12.50%
4	3/216	1.39%	12	25/216	11.57%
5	6/216	2.78%	13	21/216	9.72%
6	10/216	4.63%	14	15/216	6.94%
7	15/216	6.94%	15	10/216	4.63%
8	21/216	9.72%	16	6/216	2.78%
9	25/216	11.57%	17	3/216	1.39%
10	27/216	12.50%	18	1/216	0.46%

La strategia di gioco che dà la maggiore probabilità di vincere è quella di chiamare o il numero 10 o il numero 11.

Per calcolare quante volte esce il numero **9** nel lancio di tre dadi, possiamo utilizzare la seguente tabella:

Dado 1	Dado 2	Dado 3	Casi possibili
1	2-3-4-5-6	6-5-4-3-2	5
2	1-2-3-4-5-6	6-5-4-3-2-1	6
3	1-2-3-4-5	5-4-3-2-1	5
4	1-2-3-4	4-3-2-1	4
5	1-2-3	3-2-1	3
6	1-2	2-1	2
Totale casi favorevoli con somma 9			25

Se nel dado 1 esce il numero **1** e nel dado 2 esce il numero **2**, nel dado 3 deve uscire il numero **6** per avere come somma il numero **9**. Lo stesso ragionamento va fatto per tutti gli altri casi.

Nel lancio di tre dadi i casi possibili sono $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. $P(9) = \frac{25}{216} = 0,1157 = 11,57\%$

Per calcolare quante volte esce il numero **10** nel lancio di tre dadi, possiamo utilizzare la seguente tabella:

Dado 1	Dado 2	Dado 3	Casi possibili
1	3-4-5-6	6-5-4-3	4
2	2-3-4-5-6	6-5-4-3-2	5
3	1-2-3-4-5-6	6-5-4-3-2-1	6
4	1-2-3-4-5	5-4-3-2-1	5
5	1-2-3-4	4-3-2-1	4
6	1-2-3	3-2-1	3
Totale casi favorevoli con somma 10			27

Se nel dado 1 esce il numero **1** e nel dado 2 esce il numero **3**, nel dado 3 deve uscire il numero **6** per avere come somma il numero **10**. Lo stesso ragionamento va fatto per tutti gli altri casi.

$$P(10) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$$

9. Le lettere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo $\aleph_0$ (*aleph-zero*) indica la cardinalità di $\mathbb{N}$. Gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ hanno anch'essi cardinalità $\aleph_0$? Si motivi la risposta.

Gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono insiemi numerabili in quanto tra i loro elementi e quelli dell'insieme $\mathbb{N}$ intercede una corrispondenza biunivoca. Si dice anche che hanno la stessa cardinalità o che sono insiemi equipotenti. $\text{card}(\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{Q}) = \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 = \text{aleph-zero}$

Un insieme che ha la stessa potenza dell'insieme $\mathbb{N}$ si dice **insieme numerabile**.

Per dimostrare che $\text{card}(\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ basta trovare una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ che sia

biunivoca. Consideriamo la funzione: $f: \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1-n}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Questa funzione genera la seguente tabella:

$\mathbb{N}: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
$\mathbb{Z}: 0 \rightarrow 1 \rightarrow -1 \rightarrow 2 \rightarrow -2 \rightarrow 3 \rightarrow -3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$

Dalla quale si evince chiaramente che esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{Z}$ e l'insieme $\mathbb{N}$.

La numerabilità dell'insieme $\mathbb{Q}$ risulta abbastanza chiara se leggiamo attentamente la seguente tabella:

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...	
3/1	3/2	3/3	3/4	...		
4/1	4/2	4/3	...			
5/1	5/2	...				
6/1	...					
...						

Dalla quale si deduce facilmente la corrispondenza biunivoca tra gli elementi (prima colonna della tabella) e gli elementi dell'insieme $\mathbb{Z}$ (che sono rappresentati dagli elementi delle altre colonne).

L'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile in quanto ha la potenza del continuo.

10. Si stabilisca per quali valori reali di a e b , si ha: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+bx}-2}{x} = 1$

Se fosse $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{a+bx}-2) \neq 0$ il limite proposto sarebbe divergente e non potrebbe essere uguale ad

1. Infatti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+bx}-2}{x} = \frac{\sqrt{a}-2}{0} = \infty$ Perché il limite proposto sia uguale ad 1 deve essere:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{a+bx}-2) = 0 \quad \sqrt{a}-2=0 \quad \sqrt{a}=2 \quad \mathbf{a=4}$$

Il limite proposto assume la forma $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+bx}-2}{x} = 1$ e si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Calcolo il seguente limite applicando la regola D'Hospital $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+bx}-2}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{2\sqrt{4+bx}} = 1 \Rightarrow \frac{b}{4} = 1 \quad \mathbf{b=4} \quad \text{I valori trovati sono: } \mathbf{a=4} \quad \mathbf{b=4}$$

Altro metodo per calcolare il limite che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+bx}-2}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+bx}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4+bx}+2}{\sqrt{4+bx}+2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+bx-4}{x\sqrt{4+bx}+2} = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x\sqrt{4+bx}+2} = 1 \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{4+2}} = 1 \quad \frac{b}{4} = 1 \quad \mathbf{b=4}$$