PROBLEMA 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy: il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.

Figura 1

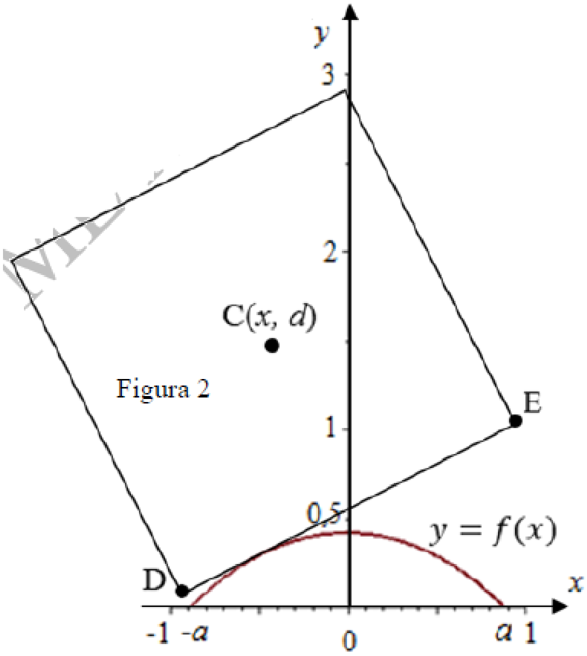


Figura 2

1) Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a\,;\ a]$; determina inoltre il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.

Studiamo la funzione $f(x) = \sqrt{2} - \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ con $x \in \mathbb{R}$ per verificare che il suo grafico è compatibile con il profilo della pedana.

$dom\, f = \mathbb{R}$ $\quad f(-x) = \sqrt{2} - \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$ Si tratta di una funzione pari il cui grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Intersezioni con gli assi cartesiani

$x=0 \Rightarrow \quad y=\sqrt{2}-\frac{e^0+e^{-0}}{2}=\sqrt{2}-\frac{1+1}{2}=\sqrt{2}-1$ Il grafico della funzione incontra l'asse delle ordinate nel punto $\left(0;\sqrt{2}-1\right)$

$\sqrt{2}-1 \simeq 0,414<5$ in sintonia con quanto risulta dal grafico della figura 2.

$y=0 \Rightarrow \quad \sqrt{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad e^x+e^{-x}=2\sqrt{2} \quad e^x+\frac{1}{e^x}=2\sqrt{2}$

Pongo $e^x=t$ ottengo: $t^2-2\sqrt{2}\,t+1=0 \quad \Rightarrow \quad t=\sqrt{2}\pm 1$

$e^{x_1}=\sqrt{2}+1 \quad x_1=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\simeq 0,88=a$

$e^{x_2}=\sqrt{2}-1 \quad x_2=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1}=-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\simeq -0,88=-a$

Il grafico della funzione incontra l'asse delle ascisse nei punti $\left(-\ln\left(\sqrt{2}+1\right);0\right)$ e $\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right);0\right)$

Concludiamo affermando che risulta $a=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ e quindi possiamo scrivere:

$[-a;a]=\left[-\ln\left(\sqrt{2}+1\right);\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$

Segno della funzione:

Segno della funzione

$y>0 \Rightarrow \quad \sqrt{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0 \quad t^2-2\sqrt{2}\,t+1<0$ se $-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)<x<\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

Quindi la funzione $f(x)=\sqrt{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ è positiva nell'intervallo

$\left]-\ln\left(\sqrt{2}+1\right);\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right[=]-a;a[$ in accordo col grafico della figura 2.

Intervalli di monotonia ed eventuali punti estremanti

$$f'(x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2} \quad f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=0 \quad f'(x)>0 \;\Rightarrow\; e^{-x}>e^{x} \;\Rightarrow\; e^{2x}<1 \quad 2x<\ln 1 \quad x<0$$

La funzione $f(x)$ cresce (decresce) per $x<0$ ($x>0$)

$x=0$ = punto di massimo assoluto $f(0)=\sqrt{2}+1$ = massimo assoluto

$$f'(-a)=\frac{e^{\ln(\sqrt{2}+1)}-e^{-\ln(\sqrt{2}+1)}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2-1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{2+1+2\sqrt{2}-1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=1$$

$$f'(a)=\frac{e^{-\ln(\sqrt{2}+1)}-e^{\ln(\sqrt{2}+1)}}{2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}=\frac{1-\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{1-2-1-2\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{-2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=-1$$

La tangente al grafico della funzione nel punto $(-a;0)$ forma con l'asse delle x un angolo di $45°$.

La tangente al grafico della funzione nel punto $(a;0)$ forma con l'asse delle x un angolo di $135°$.

Le due tangenti sono fra loro perpendicolari.

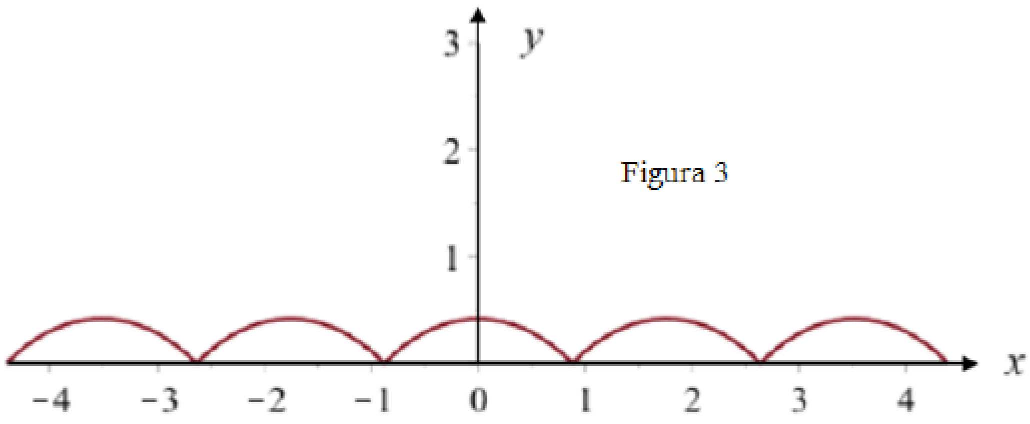
Intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso

$$f''(x)=-\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}<0\;\forall\, x\in\mathbb{R}$$

Il grafico della funzione non presenta punti di flesso e volge la concavità verso il basso in tutto il suo dominio.

I risultati trovati ci inducono ad affermare che il grafico della funzione assegnata è compatibile col profilo della pedana e quindi rappresenta adeguatamente il suo profilo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a\,;\ a]$, come mostrato in figura 3.



2) Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:

- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
- la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una "gobba", cioè dell'arco di curva di equazione $y = f(x)$ per $x \in [-a;\ a]$.

Stabilisci se tali condizioni sono verificate.

Chiamiamo $g(x)$ la funzione che si ottiene quando affianchiamo le copie del grafico della funzione $f(x)$. Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra della funzione $g(x)$ nel punto $x = a = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ dove essa è continua ma non derivabile. Vedremo che si tratta di un punto angoloso. La funzione $g(x)$ è continua, periodica di periodo $2a$ e presente infiniti punti di non derivabilità, che sono tutti punti angolosi.

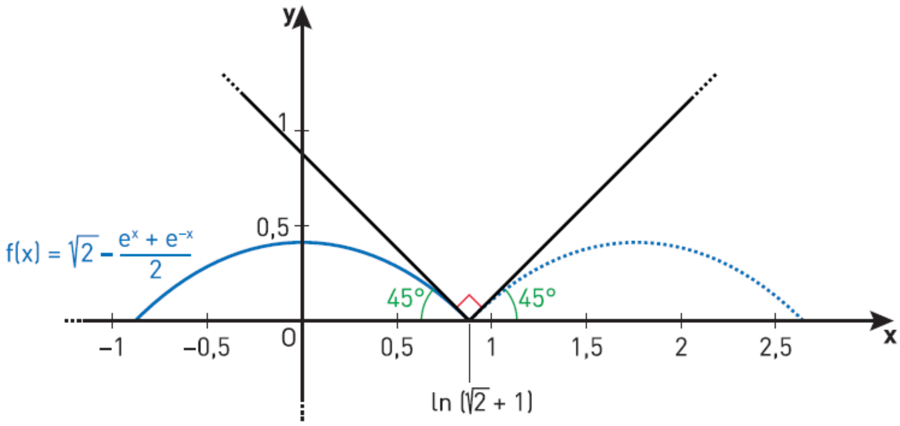
$$f'(x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}$$

$$g'_{-}(a)=\frac{e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}-e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}}{2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}=\frac{1-\left(\sqrt{2}+1\right)^{2}}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{1-2-1-2\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{-2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=-1$$

$$g'_{+}(a)=g'_{-}(-a)=\frac{e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}-e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2}-1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{2+1+2\sqrt{2}-1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=1$$

$$g'_{-}(a)\cdot g'_{+}(a)=(-1)\cdot(1)=-1$$

Le tangenti al grafico della funzione $g(x)$ nel punto $(a;0)$ sono ortogonali. Per la periodicità della funzione $g(x)$ la stessa proprietà vale in tutti i punti di non derivabilità (punti angolosi).



Verifichiamo che la lunghezza ℓ di una gobba è uguale a 2 (lato della ruota). Per determinare la lunghezza ℓ dell'arco descritto da $f(x)$ nell'intervallo $[-a;a]$ basta applicare la seguente formula: $\ell = \int_{-a}^{+a} \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2} \cdot dx = 2\int_{0}^{+a} \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2} \cdot dx$ in quanto $f'(x)$ e la funzione integranda è pari.

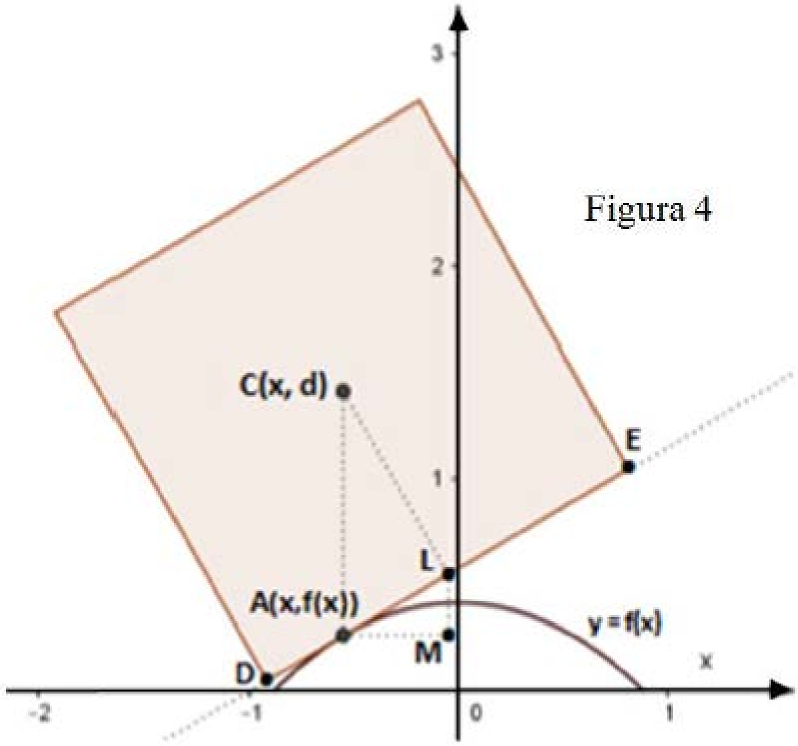
$$\ell = 2\int_0^{+a} \sqrt{1+\left[\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right]^2} \cdot dx = \cancel{2}\int_0^{+a} \sqrt{\frac{4+e^{-2x}+e^{2x}-2}{\cancel{4}}} \cdot dx = \int_0^{+a} \sqrt{2+e^{-2x}+e^{2x}} \cdot dx$$

$$\ell = \int_0^{+a} \sqrt{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2} \cdot dx = \int_0^{+a} \left(e^{x}+e^{-x}\right) \cdot dx = \left[e^{x}-e^{-x}\right]_0^a = e^a - e^{-a} - 1 + 1 = e^a - e^{-a}$$

$$\ell = e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} - e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} = \sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1 = 2$$

La gobba è lunga quanto il lato del quadrato.

3) Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli ACL e ALM in figura 4, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata d del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.



Il punto L è la proiezione del centro C del quadrato di lato DE, quindi il triangolo ACL è rettangolo in L. Il punto M ha la stessa ascissa del punto L e la stessa ordinata del punto A, quindi il triangolo ALM è rettangolo in M. Le retta AC ed LM sono parallele in quanto entrambe parallele all'asse delle ordinate. Queste due rette formano con la trasversale DE angoli alterni interni congruenti: $A\hat{L}M = L\hat{A}C$. I triangoli ACL e AML sono simili per tutti gli angoli congruenti. Ai lati omologhi posso applicare la seguente proporzione:

$$LM : AM = AL : LC \qquad LC = \frac{DE}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad f'(x) = tg\, M\hat{A}L = \frac{LM}{AM} = \frac{AL}{LC} = AL$$

$$AC = \sqrt{LC^2 + AL^2} = \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 + e^{-2x} + e^{-2x} - 2}{4}} = \sqrt{\frac{2 + e^{-2x} + e^{-2x}}{4}}$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad d = f(x) + AC = \sqrt{2} - \cancel{\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}} + \cancel{\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}} = \sqrt{2}$$

Concludiamo affermando che l'ordinata D del centro C della ruota è costante e risulta uguale a $\sqrt{2}$. Al ciclista sembra di muoversi lungo una superficie piana.

Osservazione: $M\hat{A}L = A\hat{C}L$ in quanto complementari dello stesso angolo $C\hat{A}L$.

Anche il grafico della funzione: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, per $x \in \left[-\frac{ln(3)}{2}; \frac{ln(3)}{2}\right]$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4) Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$$

$$f'\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2} = \frac{e^{\ln\sqrt{3}} - e^{-\ln\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

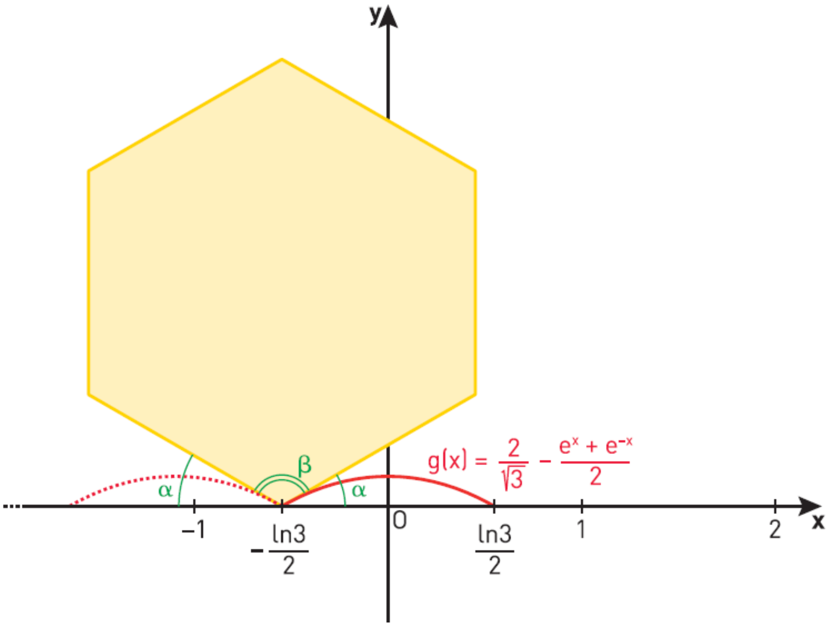
Sia α l'angolo che la tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ nel punto di ascissa

$x = -\frac{\ln 3}{2}$. Risulta: $tg\,\alpha = f'\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \alpha = 30°$

$$f'\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{\ln 3}{2}} - e^{\frac{\ln 3}{2}}}{2} = \frac{e^{-\ln\sqrt{3}} - e^{\ln\sqrt{3}}}{2} = \frac{-\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{-3+1}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = tg\,\gamma$$

$\gamma = 150°$ $\quad \beta = \gamma - \alpha = 150° - 30° = 120°$

Il poligono regolare che ha angoli interni di $120°$ è l'esagono regolare, La ruota della bicicletta ha la forma di un esagono regolare, come indicato nella figura sottostante.


y
x
β
α
α
$g(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
−1
$-\frac{\ln 3}{2}$
0
$\frac{\ln 3}{2}$
1
2

Problema N° 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:

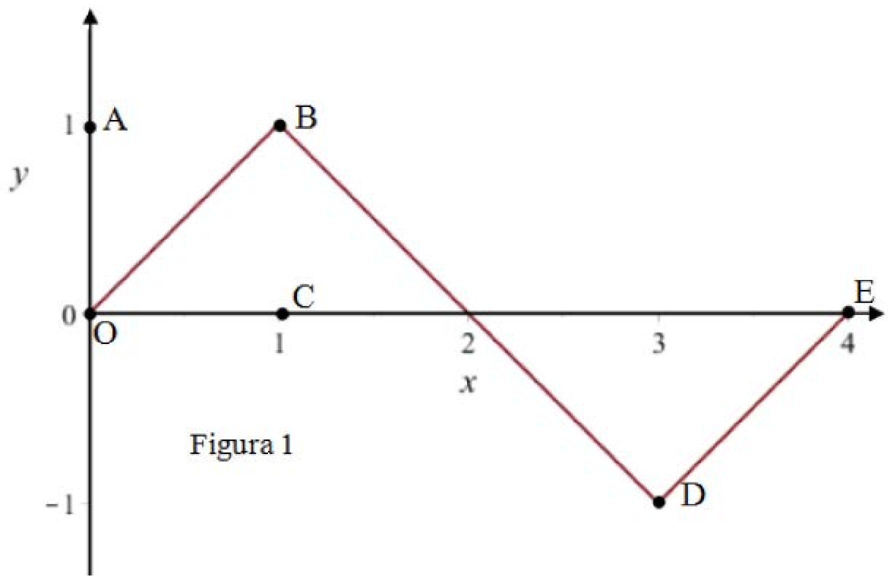


Figura 1

Come si evince dalla figura 1, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0,0)$, $B(1,1)$, $D(3,-1)$, $E(4,0)$.

1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinane il valore.

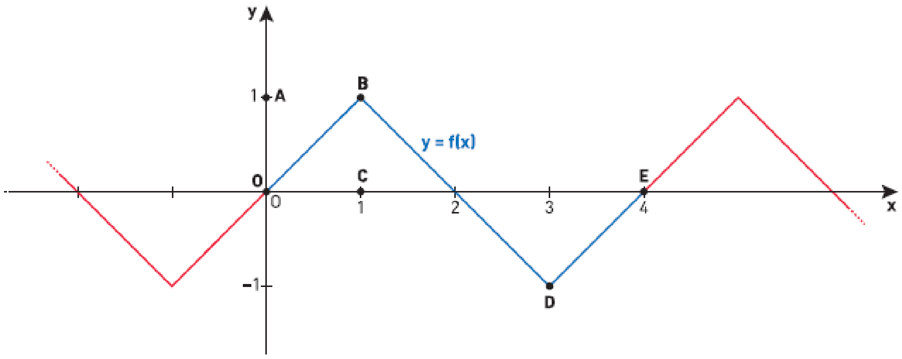
Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni: $g(x) = f'(x)$ $h(x) = \int_0^x f(t)dt$.

La funzione della quale conosciamo il grafico è continua in tutto il suo dominio perché continua a tratti ed i limiti destro e sinistro coincidono nei punti di ascissa $x = 2k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$. Non è derivabile nei punti di ascissa $x = 2k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$ in quanto la derivata destra e la derivata sinistra in tali punti non coincidono.

L'espressione analitica della funzione f nell'intervallo $[0,4]$ è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad 0 \le x \le 1 \\ -x+2 & se \quad 1 < x \le 3 \\ x-4 & se \quad 3 < x \le 4 \end{cases}$$

Disegniamo il grafico della funzione nel dominio $\mathbb{R}$ ed osserviamo che $f(x)$ si può scrivere nella seguente maniera: $f(x)=\begin{cases} x-4k & se \ -1+4k\leq x<1+4k \\ -x+2+4k & se \ \ 1+4k\leq x\leq 3+4k \end{cases}$ con $k\in\mathbb{Z}$



Poiché $f(x)$ è una funzione periodica non costante oscillante fra $-1 \ e \ +1$, il limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$ non esiste.

Per calcolare $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ utilizziamo il teorema del confronto. Infatti, risulta: $-1\leq f(x)\leq+1$

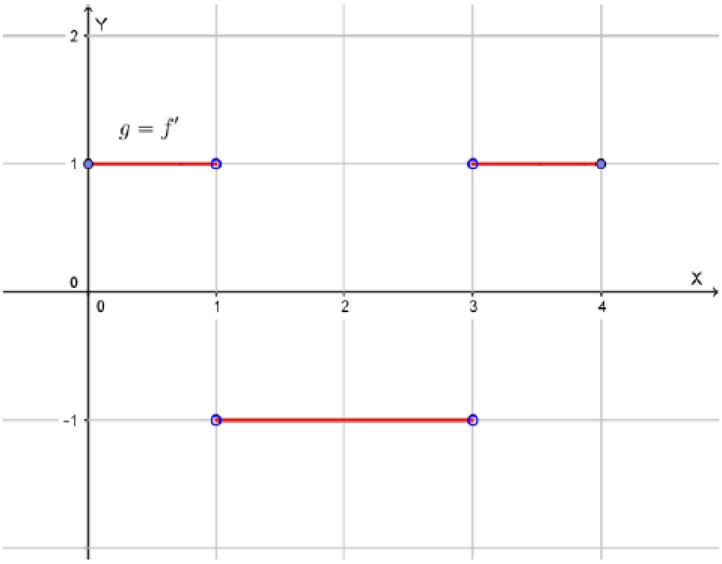
Dividendo tutto per $x>0$ otteniamo: $\frac{-1}{x}\leq\frac{f(x)}{x}\leq\frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \ \Rightarrow \ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

Adesso rappresentiamo nell'intervallo $[0,4]$ i grafici delle funzioni

$$g(x)=f'(x) \text{ e } h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

$$g(x)=f'(x)=\begin{cases} 1, & se \ 0\leq x<1 \\ -1, & se \ 1<x<3 \\ 1, & se \ 3<x\leq 4 \end{cases}$$

Il suo grafico è il seguente:



Verifichiamo la derivabilità in $]0;4[$ nei punti di congiunzione $x = 1$, $x = 3$ analizzando i limiti della derivata prima da destra e da sinistra.

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 3^-} f'(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 3^+} f'(x) = 1$$

Osserviamo che i limiti destri e sinistri non coincidono, quindi f non è derivabile in $x = 1$ e $x = 3$. Per periodicità possiamo affermare che f non è derivabile nei punti $x = 1 + 4k$ e $x = 3 + 4k$ con $k \in \mathbb{Z}$, ovvero nei punti $x = 1 + 2k'$, con $k' \in \mathbb{Z}$.

Sapendo che $f(x) = \begin{cases} x & se \quad 0 \le x \le 1 \\ -x+2 & se \quad 1 < x \le 3 \\ x-4 & se \quad 3 < x \le 4 \end{cases}$ otteniamo:

$$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & se\ \ 0\le x\le 1\\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1, & se\ \ 1<x\le 3\\ \frac{1}{2}x^2-4x+8, & se\ \ 3<x\le 4\end{cases}$$

Infatti, basta determinare l'espressione analitica della funzione $h(x)$ nei tre sottointervalli $[0;1]$, $]-1;3]$, $]3;4]$

Se $0\le x\le 1$: $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x=\frac{1}{2}x^2$

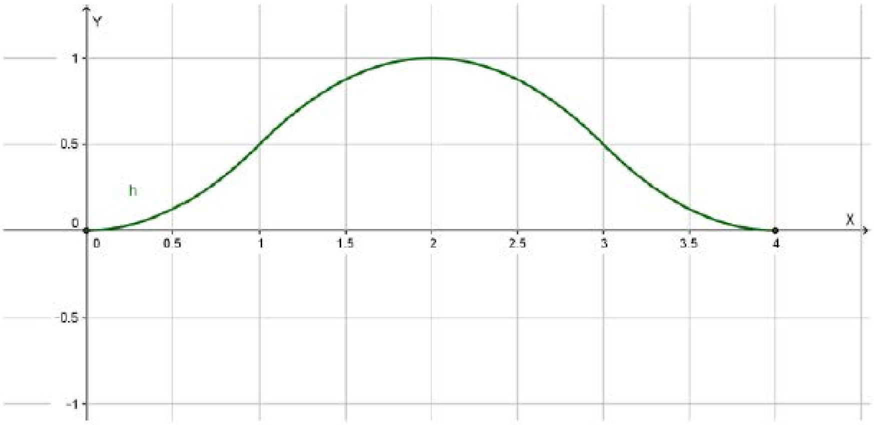
Se $1<x\le 3$: $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt=\int_0^1 t\,dt+\int_1^x(-t+2)\,dt=$
$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_1^x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+2x-\left(-\frac{1}{2}+2\right)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$

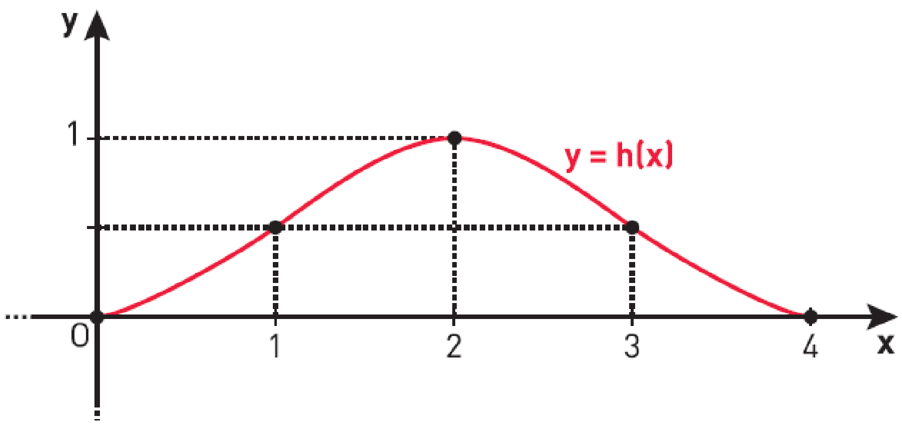
Se $3<x\le 4$: $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^3 f(t)\,dt+\int_3^x f(t)\,dt=$

$$=\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_1^3+\int_3^x(t-4)\,dt=\frac{1}{2}+\left[-\frac{9}{2}+6-(-\frac{1}{2}+2)\right]+\left[\frac{1}{2}t^2-4t\right]_3^x$$
$$=\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}x^2-4x-\left(\frac{9}{2}-12\right)=\frac{1}{2}x^2-4x+8$$

Osserviamo che il grafico è composto da tre archi di parabola che si raccordano nei punti $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ e $\left(3;\frac{1}{2}\right)$.

Si tratta di tre parti di parabola, il cui grafico complessivo è il seguente:





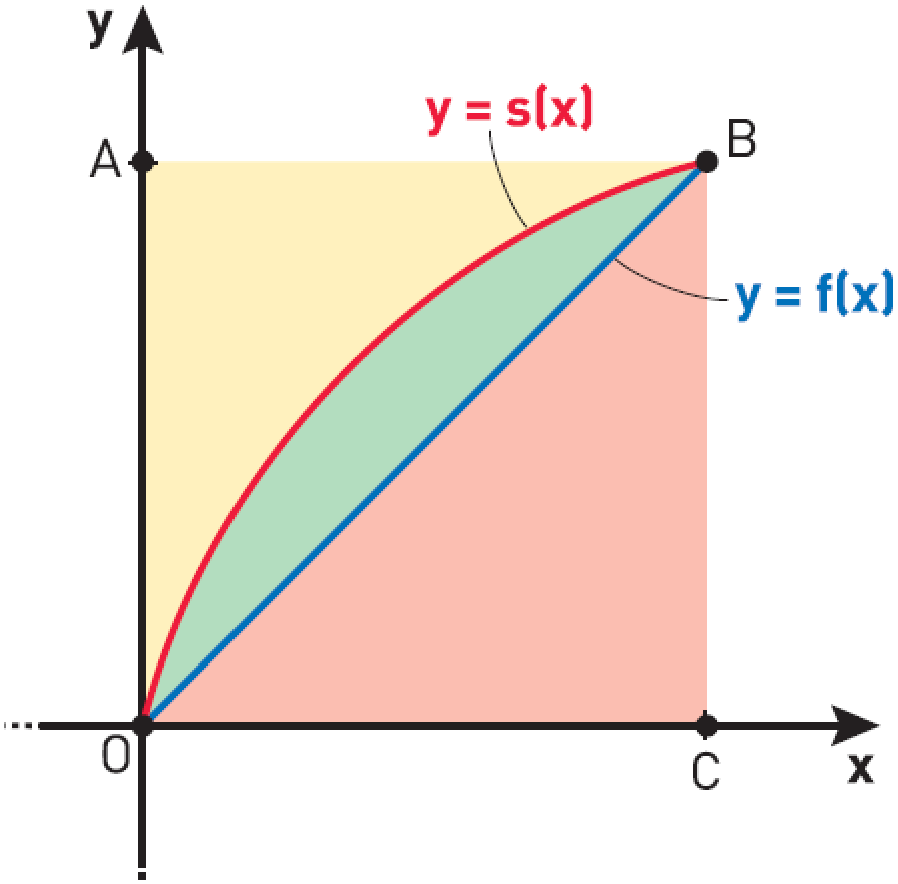
2) Considera la funzione: $s(x) = sen(bx)$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$.

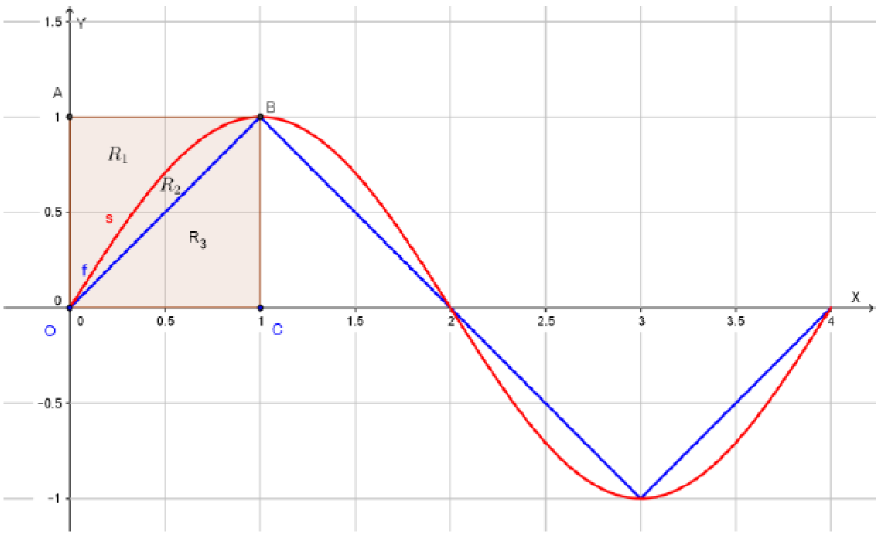
Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

La funzione $s(x) = sen(bx)$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{b} = 4 \;\; se \;\; b = \frac{\pi}{2}$; quindi $s(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

I grafici delle funzioni $f(x)$ ed $s(x)$ dividono il quadrato $OABC$ in tre parti in quanto risulta $f(0) = s(0) = 0$ ed $f(1) = s(1) = 1$ ed i grafici delle funzioni $f(x)$ ed $s(x)$ non hanno altri punti d'intersezione nell'intervallo $];1[$.



Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le due funzioni f(x) ed s(x) insieme al quadrato OABC ed indichiamo con $R_1, R_2 \;\; ed \;\; R_3$ le parti richieste:



Calcoliamo le aree delle tre regioni:

$$Area(R_1) = 1 - \int_0^1 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = 1 - \left[-\frac{2}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{\pi}$$

$$Area(R_2) = \int_0^1 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$$

$$Area(R_3) = \frac{1}{2}$$

Le probabilità richieste sono:

$$p_1 = \frac{Area(R_1)}{Area(OABC)} = 1 - \frac{2}{\pi} \cong 0.36 = 36\%$$

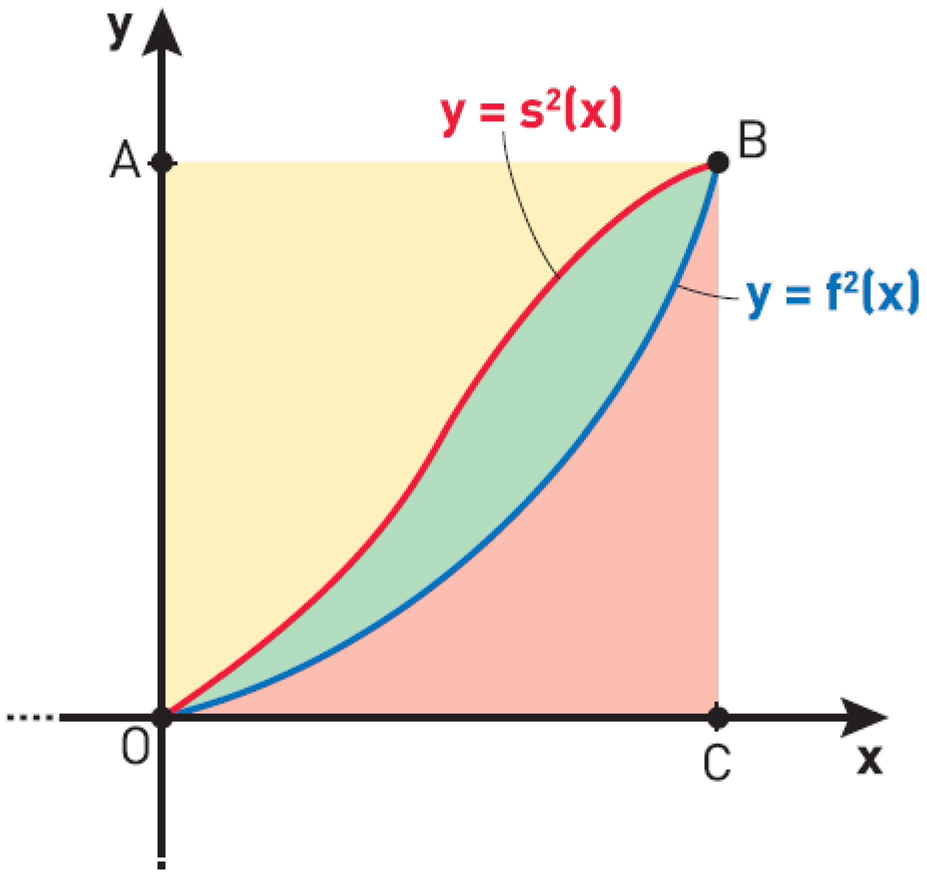
$$p_2 = \frac{Area(R_2)}{Area(OABC)} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \cong 0.14 = 14\ \%$$

$$p_3 = \frac{Area(R_3)}{Area(OABC)} = \frac{1}{2} = 0.50 = 50\ \%$$

3) Considerando ora le funzioni: $f(x)^2$ e $s(x)^2$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

3. Rappresentiamo le funzioni $f^2(x) = x^2$ e $s^2(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ nell'intervallo $[0; 1]$, osservando che, essendo $0 \leq f(x) \leq 1$ e $0 \leq s(x) \leq 1$, si avrà $f^2(x) \leq f(x)$ e $s^2(x) \leq s(x)$.



Quindi si avrà un aumento dell'area gialla e una diminuzione dell'area rosa; per quanto riguarda l'area verde è difficile fare una stima qualitativa.

Calcoliamo quindi le probabilità, ancora una volta uguali alle rispettive aree.

Per calcolare l'integrale di $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ utilizzeremo la formula di bisezione

$\sin^2(\alpha/2) = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$.

$$
\begin{aligned}
A_{rosa} &= \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \simeq 0,33 \\
A_{verde} &= \int_0^1 \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2\right]\, dx = \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = \\
&\int_0^1 \frac{1-\cos(\pi x)}{2}\, dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\int_0^1 [1-\cos(\pi x)]\, dx - \frac{1}{3} = \\
&\frac{1}{2}\left([x]_0^1 - \frac{1}{\pi}[\sin(\pi x)]_0^1\right) - \frac{1}{3} = \\
&\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\pi}(\sin\pi - \sin 0)\right] - \frac{1}{3} = \\
&\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6} \simeq 0,17 \\
A_{gialla} &= 1 - A_{rosa} - A_{verde} = 1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2} \simeq 0,5.
\end{aligned}
$$

Le probabilità di cadere nelle zone rosa, verde e gialla sono quindi rispettivamente del 33% crica, del 17% circa e del 50%.

Scoleri

Osserviamo che, essendo f(x) ed s(x) minori o uguale ad 1, i loro quadrati sono inferiori, perciò:

$f^2(x) \leq f(x) \;\; ed \;\; s^2(x) \leq s(x)$

Si ha pertanto:

$$\int_0^1 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \geq \int_0^1 sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx,$$

pertanto l'area $Area(R_1)$ aumenta (si ottiene sottraendo ad 1 una quantità minore):

la probabilità p_1 quindi aumenta.

Si ha poi:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

pertanto l'area $Area(R_3)$ diminuisce (è inferiore ad $\frac{1}{2}$):
la probabilità p_3 quindi diminuisce.

Per quanto riguarda l'area della regione compresa fra il grafico di $s^2(x)$ ed $f^2(x)$ effettuiamo il calcolo diretto (notiamo che il grafico di $s^2(x)$ sta sopra quello di $f^2(x)$):

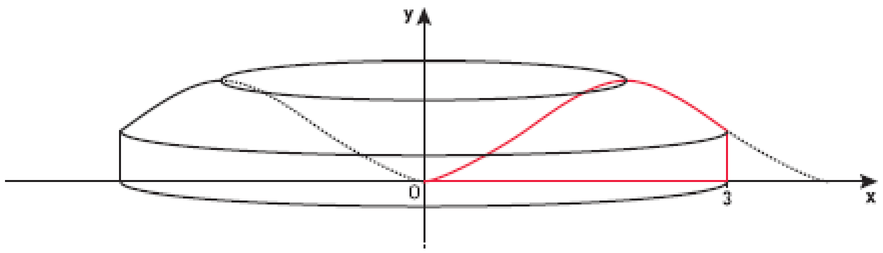
$$Area(R_2) = \int_0^1 [s^2(x) - f^2(x)]dx = \int_0^1 \left[sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1-\cos(\pi x)}{2} - x^2\right] dx =$$
$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2\pi}sen(\pi x) - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \cong 0.17 = 17\,\% > 14\,\%$$

Quindi la probabilità p_2 aumenta.

4) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0; 3]$ e l'asse delle x.

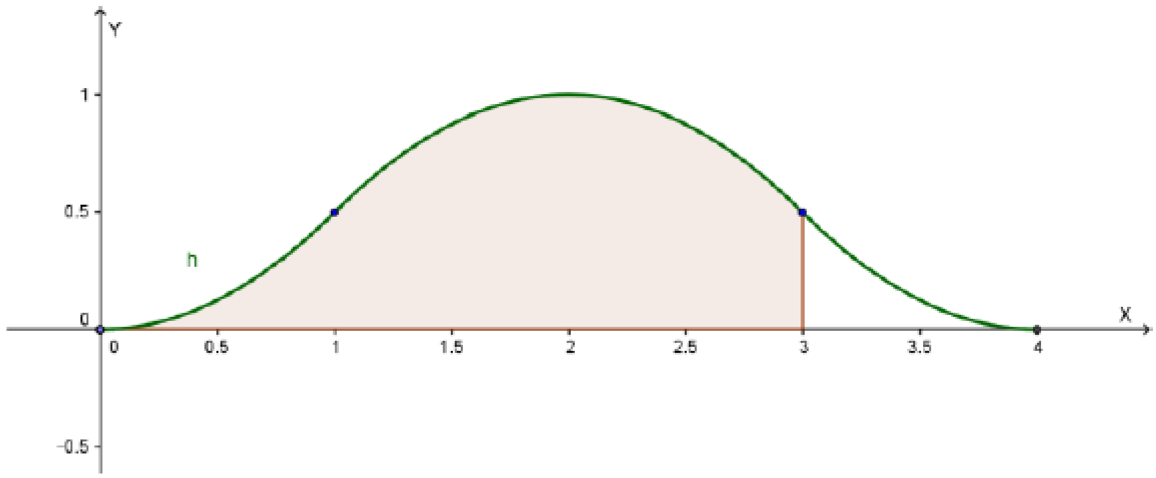
4. Per calcolare il volume del solido di rotazione utilizziamo il metodo dei gusci cilindrici.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^3 xh(x)dx = \\ &2\pi \left(\int_0^1 x\frac{x^2}{2}\,dx + \int_1^3 x\left(-\frac{x^2}{2} + 2x - 1\right)\,dx \right) = \\ &2\pi \left(\left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 \right) = \\ &2\pi \left(\frac{1}{8} - \frac{81}{8} + 18 - \frac{9}{2} + \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{83}{12}\pi \end{aligned}$$



Scoleri

Rappresentiamo la regione piana richiesta:



Calcoliamo il volume generato dalla rotazione attorno all'asse y utilizzando il metodo dei gusci cilindrici. Si veda approfondimento alla pagina

$$V = 2\pi\int_0^1 x\cdot h(x)dx + 2\pi\int_1^3 x\cdot h(x)\,dx = 2\pi\left[\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}x^2dx + \int_1^3 x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-1\right)dx\right]$$

$$= 2\pi\left[\int_0^1 \frac{1}{2}x^3dx + \int_1^3\left(-\frac{1}{2}x^3+2x^2-x\right)dx\right] = 2\pi\left[\left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{8}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3\right] =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{8}+\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{83}{12}\pi\right)\ u^3 \cong 21.729\ \ u^3 = V$$

Questionario

1. Definito il numero E come: $E = \int_0^1 xe^x dx$, dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = e - 2E$$

ed esprimere $\int_0^1 x^3 e^x \, dx$ in termini di e ed E.

Per calcolare i due integrali definiti utilizziamo la formula dio integrazione per parti:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Cerchiamo una primitiva di $x e^x$ integrando per parti:

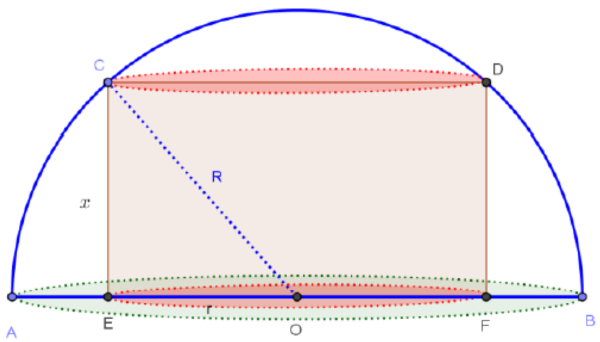
$$\int x e^x \, dx = \int x \, d e^x = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C \qquad \int_0^1 x e^x \, dx = \left[x e^x - e^x \right]_0^1 = e - e + 1 = 1$$

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = \int_0^1 x^2 \, d e^x = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, d x^2 = e - 2\int_0^1 x e^x \, dx = e - 2E$$

$$\int_0^1 x^3 e^x \, dx = \int_0^1 x^3 \, d e^x = \left[x^3 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, d x^3 = e - 3\int_0^1 x^2 e^x \, dx = e - 3(e - 2E) = e - 3e + 6E = 6E - 2e$$

2) Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica.

Dimostrare che la torta occupa meno dei $\frac{3}{5}$ del volume della semisfera.



Indichiamo con $h = x$ l'altezza del cilindro di raggio r inscritto nella sfera di raggio R. Risulta:

$$0 \le x \le R .$$

Calcoliamo il massimo di questo cilindro e verifichiamo che risulta minore dei $\frac{3}{5}$ del volume della semisfera. $\quad V_S = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3 \qquad \frac{3}{5}V_S = \frac{\cancel{3}}{5}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}\pi R^3 = \frac{2}{5}\pi R^3$

$$V_C = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - x^2\right)x = \pi\left(R^2 - x^2\right)^1\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ricordando che il prodotto di due potenze aventi la somma delle basi costante è **massimo** quando le basi sono proporzionali ai loro esponenti.

$$R^2 - x^2 + x^2 = R^2 = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \frac{R^2 - x^2}{1} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad R^2 - x^2 = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Il volume massimo del cilinfro inscritto nella sfera vale:

$$V_{\max} = \pi\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right)\cdot\frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi R^3$$

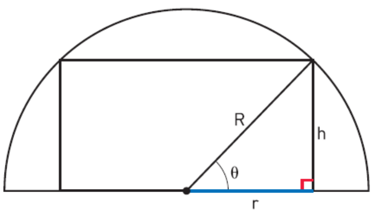
Adesso verifichiamo che risulta: $V_{\max} < \frac{2}{5}\pi R^3 \quad \frac{\cancel{2}}{3\sqrt{3}}\cancel{\pi R^3} < \frac{\cancel{2}}{5}\cancel{\pi R^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{27} < \frac{1}{25}$

$$25 < 27$$

Utilizzando le derivate otteniamo: $V_C = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - x^2\right)x = \pi\left(-x^3 + R^2 x\right) \quad 0 \le x \le R$

$V_C'(x) = \pi\left(-3x^2 + R^2\right) \quad V_C''(x) = \pi(-6x) \quad V_C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{\sqrt{3}}$ punto di massimo assoluto in quanto risulta: $V_C''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{3}}\pi R < 0$

Poi si procede come nel caso precedente.

Risoluzione goniometrica: 

$h = R\sin\vartheta \quad r = R\cos\vartheta$

$$V_C=\pi r^2 h=\pi R^2\cdot\cos^2\vartheta\cdot R\cdot\sin\vartheta=\pi R^2\left(\cos^2\vartheta\right)^1\cdot\left(\sin^2\vartheta\right)^{\frac{1}{2}}\qquad \cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta=1$$

Noi sappiamo che il prodotto di due potenze aventi la somma delle basi costante è **massimo** quando le basi sono proporzionali ai loro esponenti.

$$\frac{\cos^2\vartheta}{1}=\frac{\sin^2\vartheta}{\frac{1}{2}}\quad\Rightarrow\quad\cos^2\vartheta=2\sin^2\vartheta\quad\Rightarrow\quad\cos\vartheta=\sqrt{2}\sin\vartheta\qquad\sin^2\vartheta=1-\cos^2\vartheta=1\text{-}2\sin^2\vartheta$$

$3\sin^2\vartheta=1\qquad\sin\vartheta=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad(x)=h=R\sin\vartheta=\frac{R}{\sqrt{3}}$ Poi si procede come prima.

3) Sapendo che $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x}=1$ determinare i valori di a e b.

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x}=1\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2b}-6}{0}=1$ L'espressione $\sqrt{2b}-6$ non può essere una quantità diversa da zero in quanto il limite proposto risulterebbe $\pm\infty$. Deve essere: $\sqrt{2b}-6=0\quad\sqrt{2b}=6$

$$2b=36\qquad b=\frac{36}{2}=18$$

In questo caso il limite calcolare diventa: $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+36}-6}{x}=1$ Lo calcolo applicando la regola di De L'Hospital: $\lim_{x\to0}\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+36}}}{1}=1\qquad\lim_{x\to0}\frac{\frac{a}{2\sqrt{36}}}{1}=1\qquad a=2\sqrt{36}=2\cdot6=12$

Possiamo calcolare il limite proposto razionalizzando il numeratore:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+36}-6}{x}\cdot\frac{\sqrt{ax+36}+6}{\sqrt{ax+36}+6}=1\qquad\lim_{x\to0}\frac{ax+36-36}{x\sqrt{ax+36}+6}=1\qquad\lim_{x\to0}\frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{ax+36}+6}=1\qquad\lim_{x\to0}\frac{a}{\sqrt{36}+6}=1$$

$$\frac{a}{12}=1\qquad a=12$$

4) Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0;2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione: $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia $\frac{4}{3}$?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

Verifichiamo che la funzione proposta $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3$ sia una funzione densità di probabilità.

Per fare ciò basta verificare che risulta: **(1)** $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[0,2]$ **(2)** $\int_0^2 f(x)\,dx=1$

(1) $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3=\frac{3}{4}(2-x)\geq 0$ se $x\in[0,2]$

(2) $\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)dx=\frac{3}{2}\int_0^2 x^2 dx-\frac{3}{4}\int_0^2 x^3 dx=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2-\frac{3}{4}\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{4}=4-3=1$

Concludiamo affermando che $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3$ è una funzione densità di probabilità.

Il **Valore medio** della variabile casuale continua $\mathbf{X}$ avente densità di probabilità $\mathbf{f(x)}$ quando la variabile x appartiene all'intervallo limitato e chiuso $[0,2]$ ci viene fornito dalla seguente relazione: $M(x)=\int_a^b x\cdot f(x)\,dx$

$$M(X)=\int_0^2 x\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)dx=\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{3}{4}x^4\right)dx=\frac{3}{2}\int_0^2 x^3 dx-\frac{3}{4}\int_0^2 x^4 dx$$

$$M(X)=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2-\frac{3}{4}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_o^2=\frac{3}{2}\cdot 4-\frac{3}{4}\cdot\frac{32}{5}=6-\frac{24}{5}=\frac{30-24}{5}=\frac{6}{5}$$

$$P\left(X=\frac{4}{3}\right)=P\left(\frac{4}{3}\leq X\leq X\right)=\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)dx=0$$

$$P(X<1)=P(0\le X\le 1)=\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)d\,x=\frac{3}{2}\int_0^1 x^2 d\,x-\frac{3}{4}\int_0^1 x^3 d\,x=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\frac{3}{4}\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^1$$

$$P(X<1)=P(0\le X\le 1)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{4}=\frac{1}{2}-\frac{3}{16}=\frac{8-3}{16}=\frac{5}{16}$$

5. Dati i punti $A(-2,3,1)$, $B(3,0,-1)$, $C(2,2,-3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C.

Equazione vettoriale della retta r in forma sintetica dove, come punto iniziale, prendo il punto $A(-2,3,1)$: $P-A=k(B-A)$ con $P(x,y,z)$ generico punto della retta:

Le equazioni parametriche della retta richiesta sono; $\begin{cases} x=x_A+k(x_B-x_A) \\ y=y_A+k(y_B-y_A) \\ x=z_A+k(z_B-z_A) \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2+5k \\ y=3-3k \\ z=1-2k \end{cases}$

$P(-2+5k,3-3k,1-2k)$

Possiamo utilizzare anche la seguente formula: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$

$\dfrac{x+2}{3+2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-1}{-1-1}$ $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}$

In questo caso la retta r è l'intersezione di due piani: $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+3}{-3} \\ \dfrac{x+2}{5}=\dfrac{z-1}{-2} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+3}{-3} \\ \dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-1}{-2} \end{cases}$

Il piano π ha gli stessi parametri direttori della retta r che sono: $(5,-3,-2)$. Poiché passa per il punto $C(2,2,-3)$ la sua equazione è:

$5(x-x_C)-3(y-y_C)-2(z-z_C)$ $5(x-2)-3(y-2)-2(z+3)$ $5x-3y-2z-10=0$

L'equazione del piano π può essere scritta come prodotto scalare: $(P-P_C)\times\vec{N}$ dove $\vec{N}$ è un vettore perpendicolare al piano π. Come vettore $\vec{N}$ possiamo prendere il vettore: $\vec{N}=(5,-3,-2)$

$(P-P_C)\times\vec{N} \quad \Rightarrow \quad 5(x-x_C)-3(y-y_C)-2(z-z_C) \quad 5(x-2)-3(y-2)-2(z+3)$

$5x-3y-2z-10=0$

L'equazione generale del piano π è: $ax+by+cz+d=0$ I coefficienti a,b,c sono i numeri direttori di una qualsiasi retta perpendicolare al piano π. Nel caso nostro sono i parametri direttori della retta r, cioè: $(5,-3,-2)$

6. Determinare il numero reale a in modo che il valore di $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^a}$ sia un numero reale non nullo.

$a\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x^a$ esiste se $a>0$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x-x}{x^a}=\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x-1}{a\cdot x^{a-1}}=\frac{1}{a}\lim_{x\to 0+}\frac{-\sin x}{(a-1)\cdot x^{a-2}}=\frac{-1}{a(a-1)}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x^{a-2}}=\frac{-1}{3(3-1)}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}\cdot 1=-\frac{1}{6}$$

$a\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x^a$ esiste se $a>0$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x-x}{x^a}=\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x-1}{a\cdot x^{a-1}}=\frac{1}{a}\lim_{x\to 0+}\frac{-\sin x}{(a-1)\cdot x^{a-2}}=\frac{-1}{a(a-1)}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x^{a-2}}=\frac{-1}{3(3-1)}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}\cdot 1=-\frac{1}{6}$$

Infatti, il limite esiste se $a-2=1$ cioè se: $a=2+1=3$ Infatti, il limite esiste se $a-2=1$ cioè se: $a=2+1=3$

Altra risoluzione

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x-x}{x^a}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x}{x^a}=\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^a}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0+}\frac{x^3}{x^a}=-\frac{1}{6}$$

se $a=3$

7) Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $r=\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione $x+2y-z+1=0$ nel suo punto P di coordinate $(1;0;2)$.

I centri delle sfere richieste appartengono alla retta passente per il punto $P(1,0,2)$ e normale al piano π di equazione $x+2y-z+1=0$.

Il vettore $\vec{N}=(a,b,c)$ è un vettore perpendicolare al piano π di equazione $ax+by+cz+d=0$. Nel caso del nostro problema abbiamo: $\vec{N}=(1,2,-1)$

La retta s passante per il punto $P(1,0,2)$ e normale al piano π di equazione $x+2y-z+1=0$ ha le seguenti equazioni parametriche. $s:\begin{cases} x=1+k \\ y=0+2k \\ z=2-k \end{cases}$ $\quad C(1+k,2k,2-k)$ è il generico punto della retta s.

$$PC=\sqrt{6} \;\Rightarrow\; PC^2=6 \;\Rightarrow\; (1+k-1)^2+4k^2+(2-k-2)^2=6 \quad k^2+4k^2+k^2=6$$

$$6k^2=6 \qquad k=\pm 1$$

Le coordinate dei centri delle sfere richieste sono: $C_1(2,2,1)$ $\quad C_2(0,-2,3)$

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

E_1 = esce un numero diverso da 3 $\quad E_3$ = esce il numero 3 $\quad P(E_1)=p \quad P(E_2)=2p$

$P(E_1)+P(E_2)=1 \;\Rightarrow\; 11p+2p=1 \quad P(E_1)=\dfrac{1}{13}$ probabilità che esca un numero diverso da 3

$P(E_2)=2P(E_1)=\dfrac{2}{13}=15,38\%$ probabilità che esca il numero 3

Calcoliamo la probabilità che in 5 lanci il numero 3 esca almeno 2 volte. Si tratta di una distribuzione binomiale con $n=5$, $p=P(E_2)=\frac{2}{13}$, $q=1-P(E_2)=1-\frac{2}{13}=\frac{11}{13}$

$$\overline{p}=P(\text{il numero 3 esce almeno 2 volte})=1-P(\text{il numero 3 esce zero volte})-P(\text{il numero 3 esce una volta})$$

$$\overline{p}=1-\left[\binom{5}{0}p^0q^5+\binom{5}{1}p^1q^4\right]=1-\left[\left(\frac{11}{13}\right)^5+5\cdot\frac{2}{13}\cdot\left(\frac{11}{13}\right)^4\right]=1-\left(\frac{11}{13}\right)^4\left[\frac{11}{13}+\frac{10}{13}\right]=1-21\cdot\frac{11^4}{13^5}$$

$$\overline{p}=\frac{63832}{371293}=0{,}172=17{,}2\%=P(\text{il numero 3 esce almeno 2 volte})$$

$P(\text{il numero 3 esce almeno 2 volte})$

9) Dimostrare che l'equazione $arctg\, x+x^3+e^x=0$ ha una ed una sola soluzione reale.

La funzione $f(x)=arctg\, x+x^3+e^x$ è continua $\forall x\in\mathbb{R}$ e valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}-\infty+0=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\frac{\pi}{2}+\infty+0=+\infty$$

La funzione $f(x)=arctg\, x+x^3+e^x$, avendo segni opposti agli estremi del suo dominio, ammette almeno uno zero.

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+3x^2+e^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ la funzione $f(x)=arctg\, x+x^3+e^x$ è strettamente crescente in tutto il suo dominio e si annulla una sola volta in quanto ha segni opposti agli estremi del suo dominio. Pertanto l'equazione proposta ammette una sola soluzione reale.

10) Data la funzione $f(x)=\left|4-x^2\right|$ verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3;3]$ in cui la derivata prima non si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

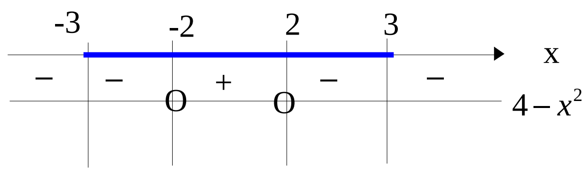
Teorema di Rolle

Se la funzione f(x) é:

1) continua in un intervallo limitato e chiuso $[a;b]$

2) derivabile in un intervallo limitato e aperto $]a:b[$

3) assume valori uguali agli estremi dell'intervallo , allora esiste almeno un punto $x_o \in]a;b[$ per il quale risulta: $f'(x_o) = 0$



$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & se \quad -2\le x\le 2 \\ x^2-4 & se \quad -3<x<-2 \ \vee \ 2<x\le 3 \end{cases}$$

L'intervallo $[-3,+3]$ è limitato e chiuso

In tale intervallo la funzione $f(x)=\left|4-x^2\right|$ è continua in quanto risulta:

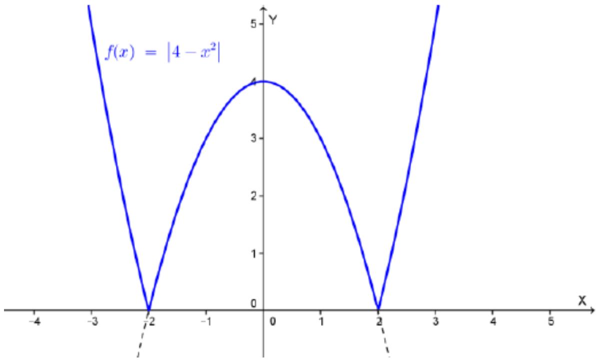
$$f(-2-)=\lim_{x\to-2-} f(x)=\lim_{x\to-2-}\left(x^2-4\right)=0 \qquad f(-2+)=\lim_{x\to-2+} f(x)=\lim_{x\to-2+}\left(4-x^2\right)=0$$

Analogamente si può verificare che la funzione è continua anche nel punto $x=2$. Questo ci consente di affermare che la funzione $f(x)=\left|4-x^2\right|$ è continua nell'intervallo $[-3,+3]$.

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & se \quad -2<x<2 \\ 2x & se \quad -3<x<-2 \ \vee \ 2<x<3 \end{cases}$$

$f'(-2-)=-4\ne f'(-2+)=4$ la funzione proposta nel punto $x=-2$ non è derivabile ed ivi presenta un punto angoloso

$f'(2-)=-4\ne f'(2+)=4$ la funzione proposta nel punto $x=2$ non è derivabile ed ivi presenta un punto angoloso



La funzione $f(x)=|4-x^2|$ non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3;3]$.

Sebbene non tutte le ipotesi del teorema di Rolle non sono verificate esiste un punto interno all'intervallo $[-3,+3]$ dove la derivata prima si annulla: $f'(0)=0$. Tuttavia questo esempio non contraddice il teorema di Rolle in quanto le sue ipotesi sono condizioni sufficienti ma non necessarie. Il teorema assicura l'esistenza di almeno un punto interno all'intervallo dove la derivata si annulla quando le ipotesi siano tutte verificate. Il teorema non esclude che possano esistere punti in cui la derivata si annulla nel caso che le ipotesi non sono verificate.

Se consideriamo l'intervallo $[-1;1]$, le prime due ipotesi del teorema sono verificate. Vale anche la terza ipotesi richiesta del teorema. Infatti: $f(-1) = f(1) = 4 - (\pm 1) = 3$. Pertanto il punto $x = 0$ trovato in precedenza è il punto di cui assicura l'esistenza il teorema di Rolle applicato all'intervallo $[-1;1]$.