Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in un'opportuna unità di misura) e le fasi di lavoro sono le seguenti: • si sceglie una funzione $y=f(x)$ così definita e continua nell'intervallo $[0;1]$, che soddisfi le condizioni: $a)\ f(0)=1$; $b)\ f(1)=0$; $c)\ 0<f(x)<1$ *per* $0<x<1$.

La macchina traccia il grafico Γ della funzione $y=f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ rispetto all'asse y, all'asse x e all'origine O, ottenendo in questo modo una curva chiusa δ ,passante per i punti $(1;0)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;-1)$.

• La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa δ e lasciando bianca la parte restante del quadrato: vengono quindi mostrate sul display alcune mattonelle affiancate, per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzato di una mattonella semplice:

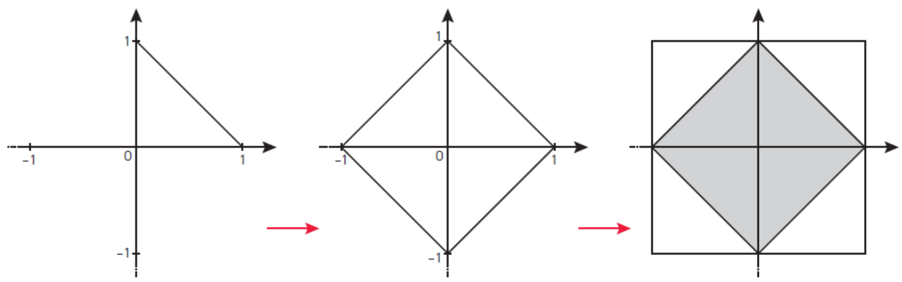
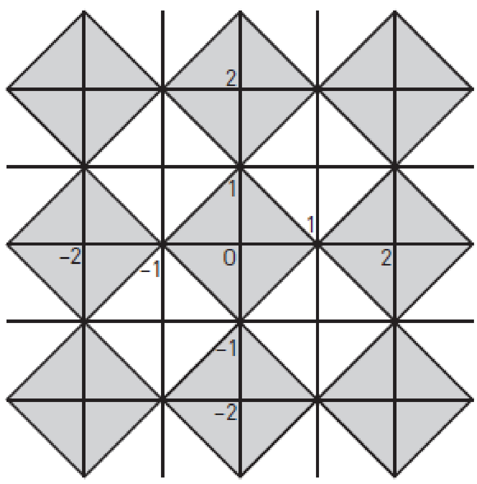


Grafico Γ Curva Λ Mattonella

La pavimentazione risultante è riportata di seguito:



1. Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione $y=f(x)$ e l'equazione della curva δ, così da potere effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.

La funzione $y=f(x)$ da scegliere deve passare per i punti $A(1;0)$ e $B(0;1)$. Possiamo scegliere la retta di equazione $\mathbf{y=-x+1}$ con $x\in[0;1]$. Tale funzione verifica le tre condizioni imposte dal problema. Il grafico γ di tale funzione è il segmento AB.

- le sostituzioni $\mathbf{x\to -x}$ e $\mathbf{y\to y}$ ci forniscono l'equazione del grafico simmetrico di γ rispetto all'asse y. $\mathbf{y=x+1}$ con $x\in[-1;0]$

- le sostituzioni $\mathbf{x\to x}$ e $\mathbf{y\to -y}$ ci forniscono l'equazione del grafico simmetrico di γ rispetto all'asse x. $-y=-x+1$ $\mathbf{y=x-1}$ con $x\in[0;1]$

- le sostituzioni $\mathbf{x\to -x}$ e $\mathbf{y\to -y}$ ci forniscono l'equazione del grafico simmetrico di γ rispetto all'origine O degli assi cartesiani. $-y=x+1$ $\mathbf{y=-x-1}$ con $x\in[-1;0]$

La curva δ così ottenuta è il quadrato della figura.

$$\delta:\begin{cases} y=-|x|+1 \quad con \ x\in[-1;1] \ e \ y\geq 0 \\ y=\ |x|-1 \quad con \ x\in[-1;1] \ e \ y<0 \end{cases}$$ oppure $$\delta: |y|=-|x|+1 \quad con \ x\in[-1;1] \ e \ y\in[-1;1]$$

Concludendo possiamo affermare che la curva δ richiesta ha equazione:

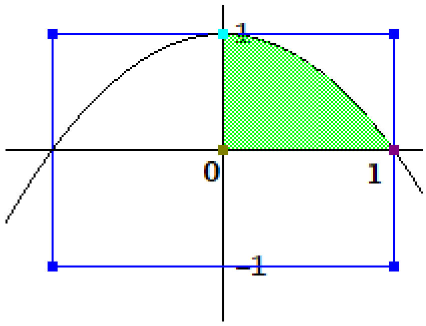
$$\mathbf{|y|+|x|=1 \quad con \ x\in[-1;1] \ e \ y\in[-1;1]}$$

Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia $f'(0)=0$ e l'area della parte colorata pari al 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo e di terzo grado.

2. Dopo avere verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$ della funzione $f(x)$ polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.

Sia $f(x)=ax^2+bx+c$ una generica funzione polinomiale di secondo grado. Sia $f'(x)=2ax+b$ la sua derivata prima.



$f(0)=1 \Rightarrow$ $\mathbf{c=1}$ $f(1)=0 \Rightarrow a+b+c=0$ $f'(0)=0 \Rightarrow$

$\mathbf{b=0} \Rightarrow \mathbf{a=-1}$ $\mathbf{f(x)=1-x^2}$ con $0 \le x \le 1$

L'area della superficie del quadrato è 4 e quindi la parte colorata della mattonella deve essere: $4 \cdot 55\% = 4 \cdot \frac{55}{100} = \frac{11}{5}$

L'area della zona colorata si ricava calcolando il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \left(-x^2+11\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3} \neq \frac{11}{5}$$

La funzione $\mathbf{f(x)=1-x^2}$ con $0 \le x \le 1$ non può rappresentare la mattonella richiesta.

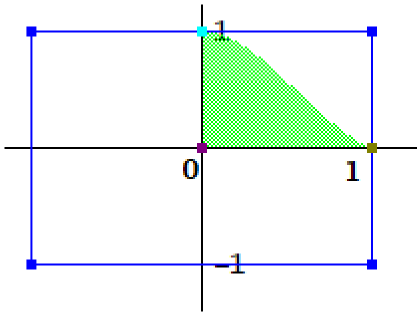
Considero la funzione polinomiale di terzo grado $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ con $0 \le x \le 1$

Risulta: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f(0)=1 \Rightarrow$ $\mathbf{d=1}$ $f(1)=0 \Rightarrow a+b+c=0$

$$f'(0)=0 \Rightarrow \mathbf{c=0} \quad \begin{cases} a+b+1=0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-a-1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \quad y=f(x)=ax^3-(1+a)x^2+1 \quad \text{con } 0 \le x \le 1$$

Impongo che l'area della mattonella colorata sia $\frac{11}{5}$; ottengo:

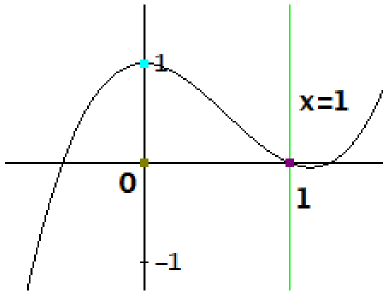
$$4\int_0^1 \left[ax^3-(1+a)x^2+1\right] dx = \frac{11}{5} \quad 4\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{1+a}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{11}{5} \quad \frac{a}{4}+\frac{1+a}{3}+1=\frac{11}{20} \quad \mathbf{a=\frac{7}{5}}$$



$\mathbf{f(x)=\frac{7}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2+1}$ $\qquad f(0)=1 \qquad f(1)=0$

Risulta $0<f(x)<1 \quad \forall x\in]0;1[$ in quanto la funzione $f(x)$ in tale intervallo è strettamente decrescente.

Risulta così verificata anche la terza condizione (c)

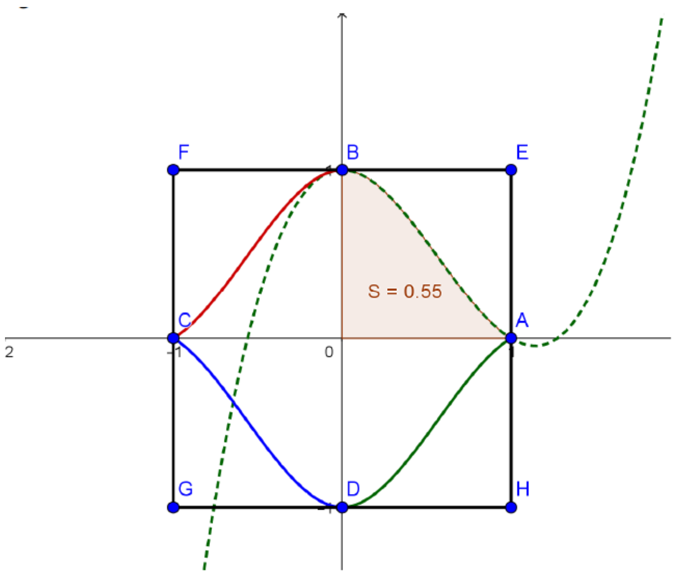


Concludendo possiamo affermare che la funzione trovata verifica tutte le condizioni richieste dal problema.

Grafico della funzione

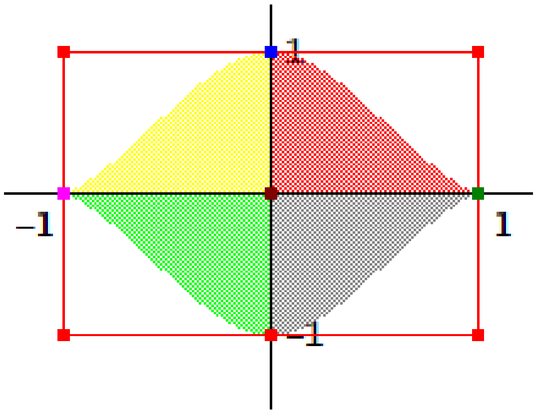
$\mathbf{f(x)=\frac{7}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2+1}$ con $x\in[0;1]$

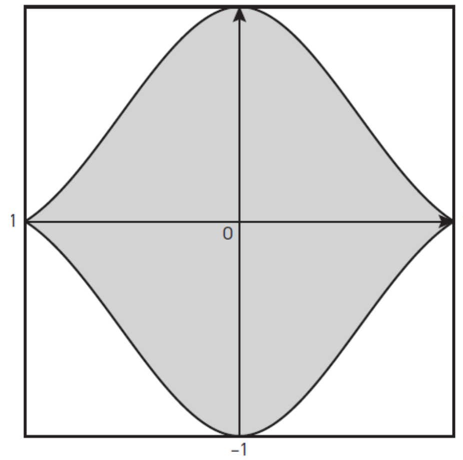
e disegno della mattonella



Per disegnare l’intera mattonella basta effettuare le simmetrie rispetto all’asse x, all’asse y, all’origine degli assi cartesiani.

Il disegno completo della mattonella è quello indicato in figura.





Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x)=1-x^n$ e $b_n=(1-x)^n$, considerate per $x\in[0;1]$, con n intero positivo.

3. Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b), c). dette $A(n)$ e $B(n)$ le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni a_n e b_n, calcola $\lim_{n\to+\infty} A(n)$ e $\lim_{n\to+\infty} B(n)$ e interpreta i risultati in termini geometrici.

La funzione $a_n(x)=1-x^n$ con $0\le x\le 1$ verifica le condizioni a), b), c). Infatti:

a) $a_n(0)=1-0^n=1$ b) $a_n(1)=1-1^n=1-1=0$ c) $0<x<1 \Rightarrow 0<x^n<1 \Rightarrow -1<-x^n<0 \Rightarrow$

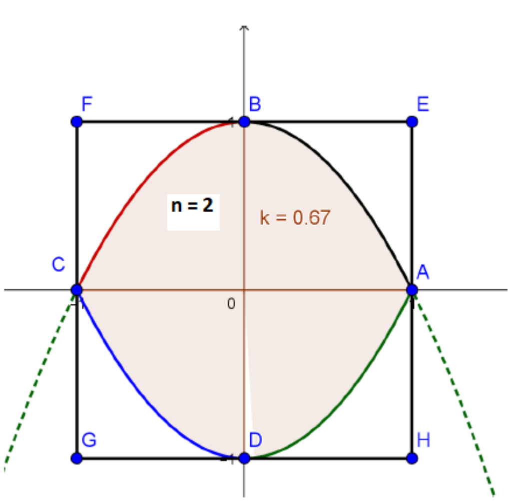
$1-1<1-x^n<1+0 \Rightarrow 0<1-x^n<1 \quad \forall x\in[0;1]$

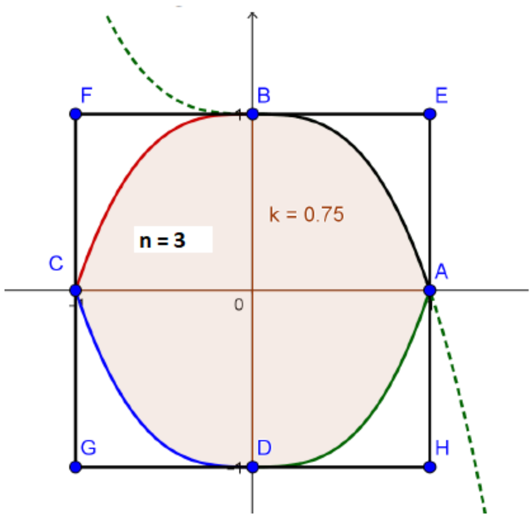
Anche la funzione $b_n(x)=(1-x)^n \quad \forall x\in[0;1]$ verifica le condizioni a), b), c).

Infatti: a) $b_n(0)=1$ b) $b_n(1)=0$ c) $0<x<1 \Rightarrow -1<-x<0 \Rightarrow 1-1<1-x<1 \Rightarrow 0<1-x<1$

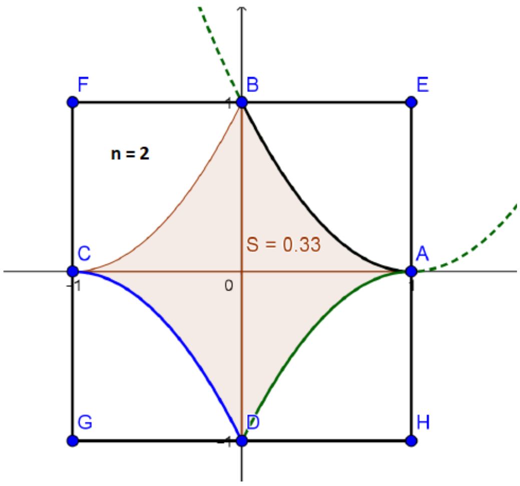
$\Rightarrow \quad 0<(1-x)^n<1$

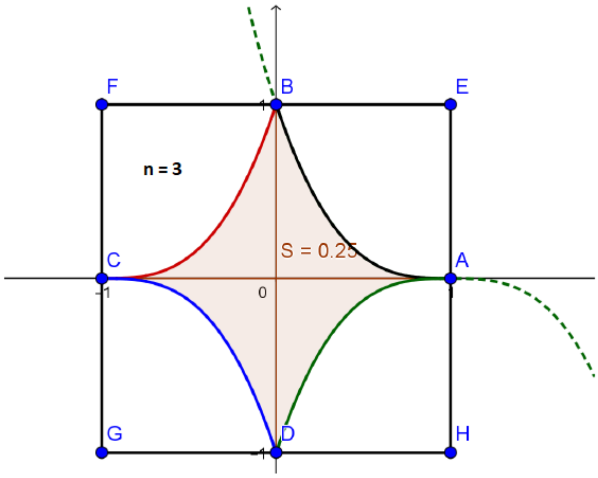
Le funzioni $a_n = 1 - x^n$ $(0 \le x \le 1)$, per $n=2$ ed $n=3$, generano le due seguenti figure:





Le funzion $x \in [0;1]$ i $b_n = (1-x)^n$ $(0 \le x \le 1)$, per $n=2$ ed $n=3$, generano le due seguenti figure:

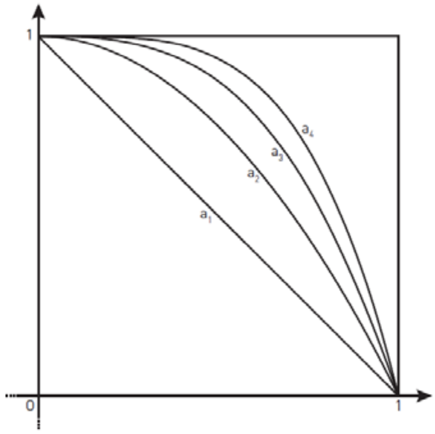




L'area della parte colorata delle mattonelle riferita al grafico della funzione $a_n(x) = 1 - x^n$ si ottiene calcolando il seguente integrale definito:

$$A(n) = 4\int_0^1 (1-x)^n \, dx = 4\left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{4n}{n+1} \qquad \lim_{n\to+\infty} A(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{n+1} = 4$$

Il significato geometrico di questo limite è il seguente: all'aumentare del valore di n l'area $A(n)$ aumenta e quando $n \to +\infty$ tale area occupa completamente l'area del quadrato. La mattonella è completamente colorata.

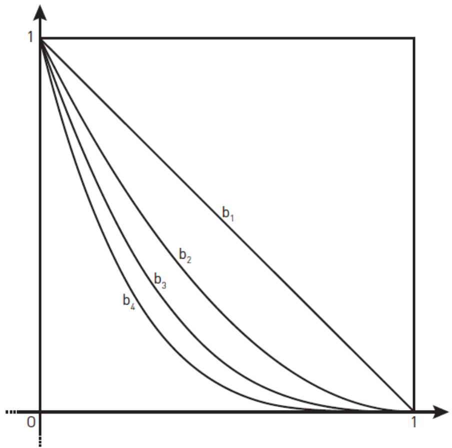


Per la funzione $b_n(x) = (1-x)^n$ abbiamo:

$$B(n) = 4\int_0^1 (1-x)^n \, dx = -4\int_0^1 (1-x)^n \, d(1-x) = -4\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -4\left[0 - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{4}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} B(n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{4}{n+1} = 0$$

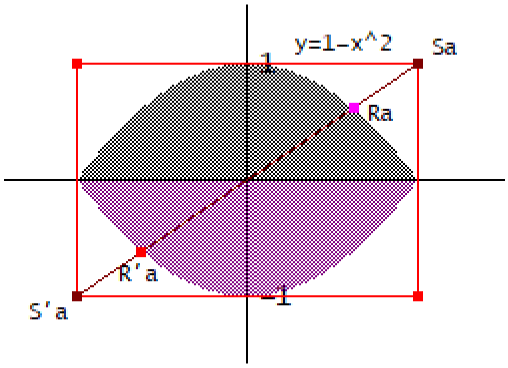
Il significato geometrico di questo limite è il seguente: all'aumentare del valore di n l'area $B(n)$ diminuisce e quando $n \to +\infty$ tale area si annulla. La mattonella diventa completamente bianca.

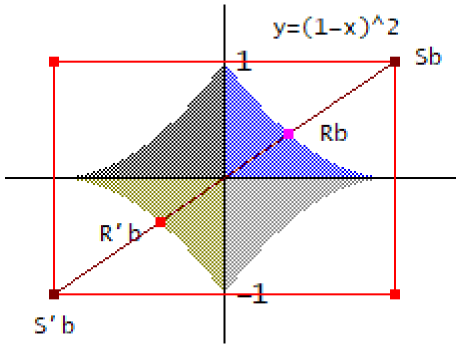


Il cliente decide di ordinare 5000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5000 con quello derivato da $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo avere depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale.

A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

4. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.





Sia $S_aS'_a$ la diagonale che la macchina sorvola per tornare nella posizione di partenza dopo avere effettuato la verniciatura nel caso della funzione $a_2(x)=1-x^2$.

A_2 = le gocce di colore cadono lungo la parte non colorata della diagonale $S_aS'_a$

$$p(A_2)=\frac{S_aR_a+S'_aR_a}{S_aS'_a}=\frac{2S_aR_a}{S_aS'_a} \quad \text{con} \quad S_a(1;1) \quad S_aS'_a=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Le coordinate del punto R_a si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y=1-x^2 \\ y = x \\ 0<x<1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+x-1 \\ y = x \\ 0<x<1 \end{cases} \quad x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad R_a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \quad R'_a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$2S_aR_a=2\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}=2\sqrt{2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}=2\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$$

$p(A_2)=\dfrac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ = probabilità che una goccia cada nella parte di diagonale non colorata

Sia $S_bS'_b$ la diagonale che la macchina sorvola per tornare nella posizione di partenza dopo avere effettuato la verniciatura nel caso della funzione $b_2(x)=(1-x)^2$.

B_2 = le gocce di colore cadono lungo la parte non colorata della diagonale $S_bS'_b$

$$p(B_2)=\frac{S_bR_b+S'_bR_b}{S_bS'_b}=\frac{2S_bR_b}{S_bS'_b} \quad \text{con} \quad S_a(1;1) \quad S_aS'_a=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Le coordinate del punto R_b si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y=(1-x)^2 \\ y = x \\ 0<x<1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3x+1=0 \\ y = x \\ 0<x<1 \end{cases} \quad x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad R_b\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \quad R'_a\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2};\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$$

$$2S_aR_a=2\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^2}=2\sqrt{2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}=2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

$$p(B_2)=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$ = probabilità che una goccia cada nella parte di diagonale non colorata

C_2 = cade una goccia di colore sulla diagonale di una mattonella del tipo a_2

$p(C_2)$ = probabilità che una goccia di colore cada sulla diagonale di una mattonella del tipo a_2

D_2 = cade una goccia di colore sulla diagonale di una mattonella del tipo b_2

$p(D_2)$ = probabilità che una goccia di colore cada sulla diagonale di una mattonella del tipo b_2

$$p(C_2)=p(D_2)=20\%=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$$

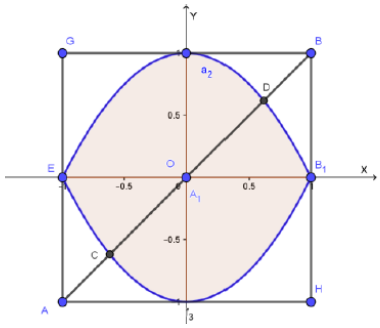
$E_2=A_2\cap C_2$ = una goccia della piastrella difettosa del primo tipo (a_2) cade fuori dalla zona colorata. A_2 e C_2 sono eventi compatibili e indipendenti.

Applicando il teorema della probabilità composta per eventi compatibili e indipendenti(orimo teorema di Laplace) otteniamo: $p(E_2)=p(A_2\cap C_2)=p(A_2)\cdot p(C_2)$

La probabilità che una mattonella con la diagonale danneggiata ed una macchia sulla parte non colorata del tipo a_2 è pari a:

$$p(A_2)\cdot p(C_2)=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{5}\simeq 0{,}0764=7{,}64\%=\frac{\mathbf{n_{2a}}}{\mathbf{5000}}$$

teorema della probabilità composta. $\mathbf{n_{2a}}$ = mattonelle con una macchia sulla parte non colorata delle diagonali danneggiate del tipo a_2.



Infatti la mattonella deve avere la diagonale danneggiata ed una goccia deve cadere sulla parte non colorata, cioè su uno dei due segmenti AC, BD.

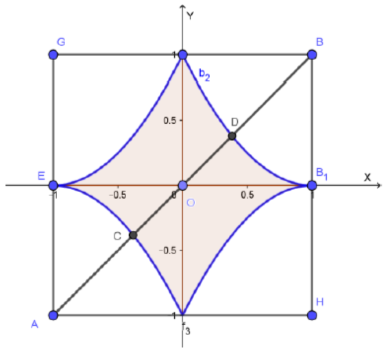
$F_2=B_2\cap D_2$ = una goccia della piastrella difettosa del secondo tipo (b_2) cade fuori dalla zona colorata. B_2 e D_2 sono eventi compatibili e indipendenti.

Applicando il teorema della probabilità composta per eventi compatibili e indipendenti(orimo teorema di Laplace) otteniamo: $p(F_2)=p(B_2\cap D_2)=p(B_2)\cdot p(D_2)$

La probabilità che una mattonella con la diagonale danneggiata ed una macchia sulla parte non colorata del tipo b_2 è pari a:

$$p(B_2)\cdot p(D_2)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{5}\simeq 0{,}01236=12{,}36\%=\frac{\mathbf{n_{2b}}}{\mathbf{5000}}$$

teorema della probabilità composta. $\mathbf{n_{2b}}$ = mattonelle con una macchia sulla parte non colorata delle diagonali danneggiate del tipo b_2.



Infatti la mattonella deve avere la diagonale danneggiata ed una goccia deve cadere sulla parte non colorata, cioè su uno dei due segmenti AC, BD.

Le mattonelle con una macchia sulla parte non colorata delle diagonale complessivamente danneggiate sono circa:

$$5000\cdot p(A_2)\cdot p(C_2)+\ =5000(7{,}64\%+12{,}36\%)=5000\cdot 20\%=1000$$

$5000\cdot p(A_2)\cdot p(C_2)=\frac{7{,}64}{100}\cdot 5000=\mathbf{382}$ mattonelle con una macchia sulla parte non colorata delle diagonali danneggiate del tipo a_2.

$5000\cdot p(B_2)\cdot p(D_2)=\frac{12{,}36}{100}\cdot 5000=\mathbf{618}$ mattonelle con una macchia sulla parte non colorata delle diagonali danneggiate del tipo b_2.

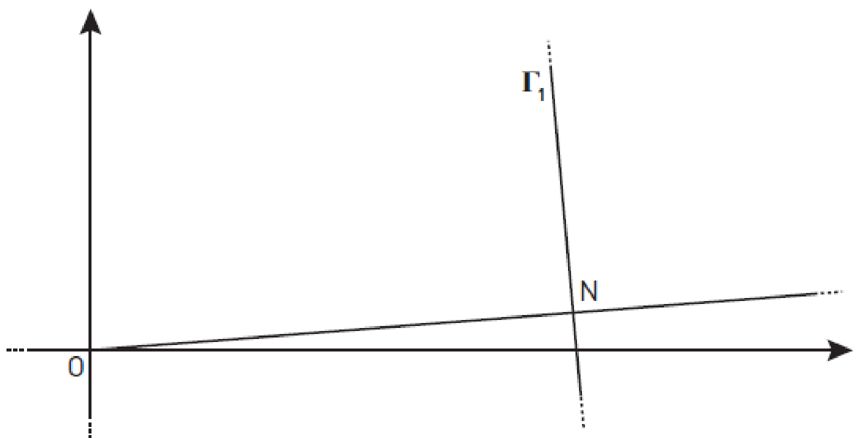
2 Consideriamo la funzione $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f_k(x) = -x^3 + kx + 9$ con $k \in \mathbb{Z}$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.

2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.

3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_P; y_P)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).

4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Problema N°2

2 Consideriamo la funzione $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f_k(x) = -x^3 + kx + 9$ con $k \in \mathbb{Z}$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.

$f_k(x) = -x^3 + kx + 9 \quad f_k(0) = 9 \quad f_k(1) = k+8 \quad f_k'(0) = k \quad f_k'(x) = -3x^2 + k \quad f_k'(1) = k-3$

$r_k: \; y - f_k(0) = f_k'(0)(x-0) \qquad y-9 = k\,x \qquad y = k\,x+9$

$s_k: \; y - f_k(1) = f_k'(1)\cdot(x-1) \qquad y-8-k = (k-3)(x-1) \qquad y = (k-3)-k+3+k+8 \qquad y = (k-3)x+11$

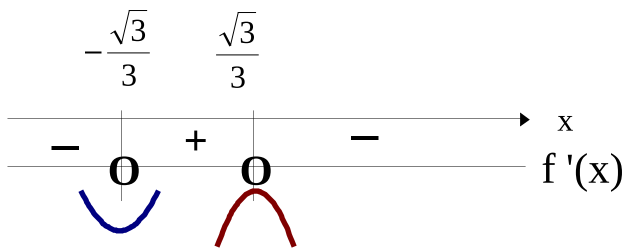
Per trovare l'ascissa del punto M intersezione delle rette r_k ed s_k basta risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} y = k\,x+9 \\ y = (k-3)x+11 \end{cases} \qquad k\,x+9 = (k-3)x+11 \qquad \cancel{k\,x}+9 = \cancel{kx}-3x+11 \qquad x = \frac{2}{3} \qquad y_M\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}k+9$

$$\mathbf{M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}k+9\right)}$$

2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.

$y_M < 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}k+9 < 10 \quad \Rightarrow \quad k < \frac{3}{2} \qquad k=1$ è il valore richiesto in corrispondenza del quale la funzione diventa: $\quad f_1(x) = -x^3+x+9 \quad dom\, f_1 = \mathbb{R} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(-x^3+x+9\right) = \pm\infty$

$f_1'(x) = -3x^2+1 \quad f_1'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

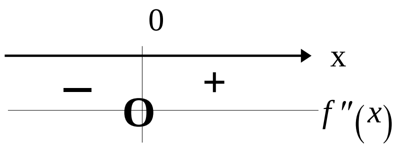


$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ punto di massimo relativo $\quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ punto di minimo relativo

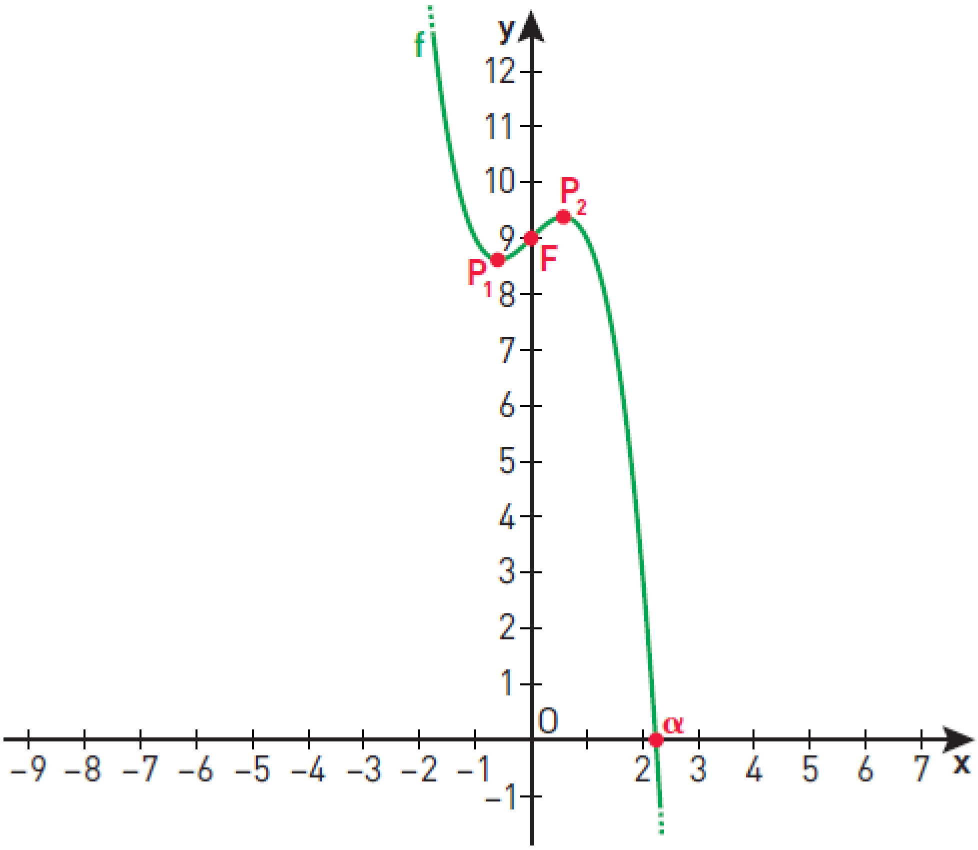
$P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{2}{9}\sqrt{3}+9\right)$ immagine geometrica del punto di minimo relativo

$P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{9}\sqrt{3}+9\right)$ immagine geometrica del punto di massimo relativo

$f_1''(x) = -6x \quad f_1''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ punto di flesso discendente



$F(0;9)$ immagine geometrica del punto di flesso



Il grafico della funzione $f_1(x) = -x^3 + x + 9$ incontra l'asse delle ascisse in un solo punto di ascissa

$x = \alpha > \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}577$

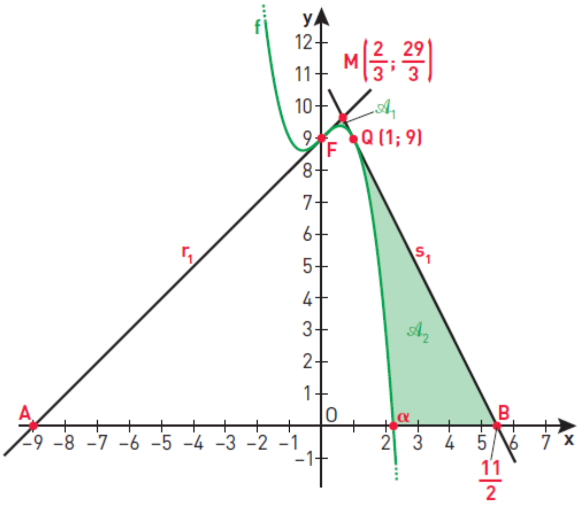
L'equazione $-x^3 + x + 9 = 0$ cioè $x^3 - x - 9 = 0$ ammette una sola soluzione $x = \alpha > 0{,}577$

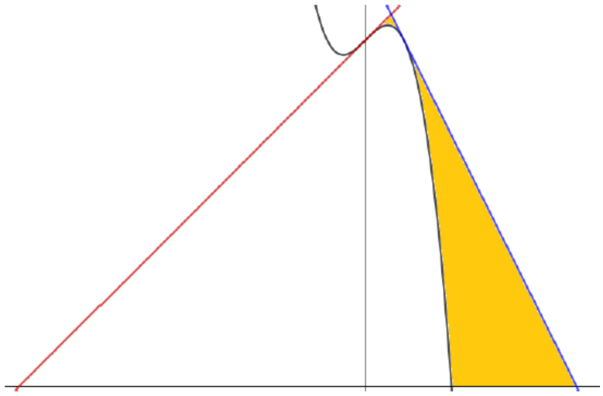
$$f_1(2) = 3 > 0 \qquad f_1(3) = -15 < 0$$

$f_1(x)$, nell'intervallo $[2;3]$, è strettamente decrescente e quindi in tale intervallo si annulla una sola volta. $f_1(2{,}2) > 0 \quad f_1(2{,}25) < 0 \quad f_1(2{,}3) < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \simeq 2{,}2$

3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_P; y_P)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).

La retta r_1 ha equazione $y=x+9$. Tale retta incontra l'asse delle ascisse nel punto $A(-9;0)$ e la curva Γ_1 di equazione $-x^3+x+9$ nel punto $F(0;9)$. La retta s_1 ha equazione $y=-2x+11$. Tale retta incontra l'asse delle ascisse nel punto $B\left(\frac{11}{2};0\right)$, la retta r_1 nel punto $M\left(\frac{2}{3};\frac{29}{3}\right)$ e risulta tangente alla curva Γ_1 di equazione $-x^3+x+9$ nel punto $Q(1;9)$.





$$\int\left[x+9-\left(-x^3+x+9\right)\right]d\,x=\int x^3\,d\,x=\frac{x^4}{4}+C$$

$$\int\left[-2x+11-\left(-x^3+x+9\right)\right]d\,x=\int\left(x^3-3x+2\right)d\,x=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x+K$$

$$A_1=\int_0^{\frac{2}{3}}x^3\,d\,x+\int_{\frac{2}{3}}^{1}\left(x^3-3x+2\right)d\,x=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{2}{3}}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x+2x\right]_{\frac{2}{3}}^{1}=\frac{4}{81}+\frac{11}{324}=\frac{1}{12}$$

$$\int\left[-2x+11-\left(-x^3+x+9\right)\right]d\,x=\int\left(x^3-3x+2\right)d\,x=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x+C_1$$

$$\int(-2x+11)\,d\,x=-x^2+11x+K_1$$

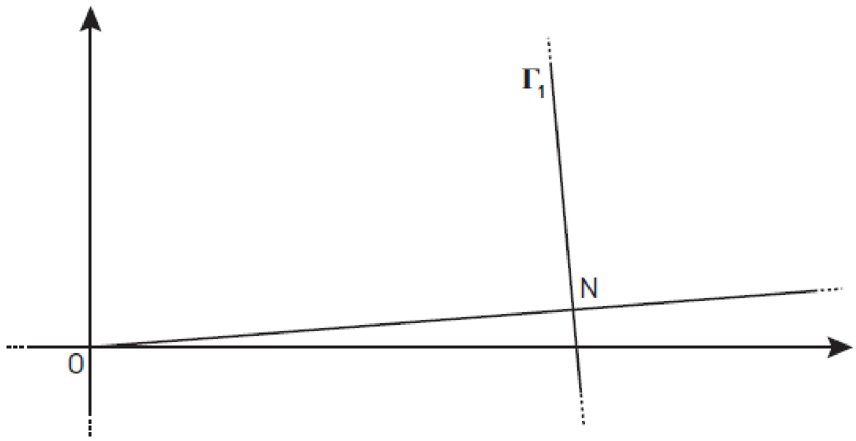
$$A_2=\int_1^{\alpha}\left(x^3-3x+2\right)d\,x+\int_{\alpha}^{\frac{11}{2}}(-2x+1)\,d\,x=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^{\alpha}+\left[-x^2+11x\right]_{\alpha}^{\frac{11}{2}}$$

$$A_2 = \frac{\alpha^4}{4} - \frac{3}{2}\alpha^2 + 2\alpha - \frac{3}{4} - \frac{121}{4} + \frac{121}{2} + \alpha^2 - 11\alpha = \frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^2}{2} - 9\alpha + \frac{59}{2} \quad A_2(2,2) = 13{,}14$$

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{12} + 13{,}14 \simeq 13{,}22$$

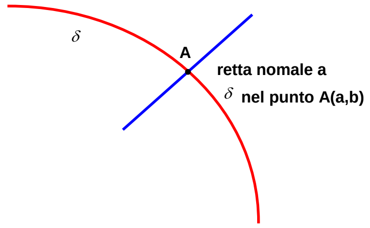
$$S(ABM) = \frac{AB \cdot y_M}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{11}{2} + 9\right) \cdot \frac{29}{3} = \frac{841}{12} \quad p = \frac{A_1 + A_2}{S(ABM)} = \frac{13{,}22}{\frac{841}{12}} = \frac{12 \cdot 13{,}22}{841} \simeq 0{,}19 = 19\%$$

4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Sia δ il grafico di una generica funzione polinomiale $y = p_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$

Sia $A(a;b)$ un suo generico punto con $b = p_n(a)$



La derivata prima di tale funzione è una funzione polinomiale di grado $n-1$

$$y'(x)=p_n'(x)=n\,a_o\,x^{n-1}+(n-1)a_1\,x^{n-2}\cdots\cdots$$

La retta normale a δ nel punto $A(a;b)$ ha equazione: $y-b=-\dfrac{1}{p_n'(a)}(x-a)$ con $y=p_n(x)$

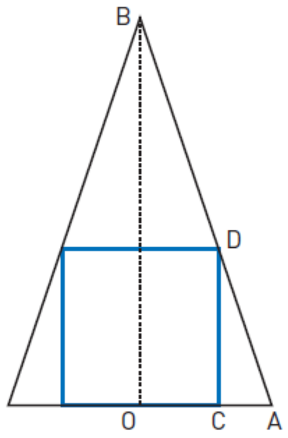
Tale normale passa per l'origine degli assi cartesiani se $x=0$ e $y=0$, cioè se:

$-b=\dfrac{1}{p_n'(a)}a$ $\quad -p_n(a)\cdot p_n'(a)=a$ con $p_n'(a)$ polinomio di grado $n-1$

Si tratta di una equazione polinomiale di grado $n+n-1=2n-1$. Pertanto l'equazione di grado $2n-1$ $-p_n(a)\cdot p_n'(a)=a$, per il teorema fondamentale dell'algebra, non può avere più di $2n-1$ radici reali. Questo significa che sulla curva δ non possono esistere più di $2n-1$ punti le cui normali passano per l'origine degli assi cartesiani.

[1] Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.

Consideriamo un cilindro retto di altezza h e raggio r inscritto in un cono retto di altezza H e raggio R. Il principio di Cavalieri ci suggerisce che le cose non cambiano se si tratta di cilindro e di un cono obliqui.



$$O\hat{A}B[s]C\hat{A}D \;\Rightarrow\; \frac{CD}{CA}=\frac{OB}{OA} \;\Rightarrow\; \frac{h}{R-r}=\frac{H}{R} \;\Rightarrow$$

$$h=\frac{H}{R}(R-r)=H\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

$$V_{cil}=\pi r^2 h=\pi r^2 H\left(\frac{R-r}{R}\right) \qquad V_{con}=\frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$\frac{V_{cil}}{V_{con}}=\frac{\cancel{\pi} r^2 \cancel{H}\left(\frac{R-r}{R}\right)}{\frac{1}{3}\cancel{\pi} R^2 \cancel{H}}=\frac{3r^2(R-r)}{R^3}=\frac{3}{R^3}\left(Rr^2-r^3\right)=f(r)$$

Il massimo della funzione $f(r)$ si ricava calcolando la sua derivata prima: $f'(r)=\frac{3}{r^3}\left(2Rr-3r^2\right)$

$f'(r)=0 \;\Rightarrow\; 2Rr-3r^2=0 \;\Rightarrow\; r=\frac{2}{3}R$ punto di massimo assoluto in quanto risulta:

$$f''(r)=\frac{3}{R^3}(2R-6r) \qquad f''\left(\frac{2}{3}R\right)=\frac{3}{R^3}(2R-4R)=-\frac{6}{R^2}<0$$

$$\left(\frac{V_{cil}}{C_{con}}\right)_{\max}=f\left(\frac{2}{3}R\right)=\frac{3}{\cancel{R^3}}\left(\cancel{R}\cdot\frac{4}{9}\cancel{R^2}-\frac{8}{27}\cancel{R^3}\right)=3\left(\frac{4}{9}-\frac{8}{27}\right)=\frac{49}{\ }$$

$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}=\frac{8}{18}<\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}=\frac{9}{18} \;\Rightarrow\;$ il volume del cilindro inscritto in un cono è sempre minore della metà del cono.

[2] Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali?

$$\begin{cases} p(1)=2p(2) \\ p(2)=2p(3) \\ p(3)=2p(4) \end{cases} \quad \text{pongo } p(4)=x \quad \text{ottengo: } \begin{cases} p(1)=2\cdot 2\cdot 2x=8x \\ p(2)=2\cdot 2x=4x \\ p(3)=2x \end{cases} \quad p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=1$$

$$\Rightarrow \quad 8x+4x+2x+x=1 \quad 15x=1 \quad x=p(4)=\frac{1}{15} \quad p(1)=\frac{8}{15} \quad p(2)=\frac{4}{15} \quad p(3)=\frac{2}{15} \quad p(4)=\frac{1}{15}$$

La probabilità P che nel lancio simultaneo dei due dadi escano due numeri uguali è la somma di 4 eventi incompatibili, ciascuno dei quali è il prodotto di due eventi elementari indipendenti. Se indichiamo con D_1 il primo dado e con D_2 il secondo dado abbiamo:

$$E_1=D_1=1\cap D_2=1(=D_1=1\wedge D_2=1) \quad E_2=D_1=2\cap D_2=2(=D_1=2\wedge D_2=2)$$

$$E_3=D_1=3\cap D_2=3(=D_1=3\wedge D_2=3) \quad E_4=D_1=4\cap D_2=4(=D_1=4\wedge D_2=4)$$

$$P(E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4)=p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)+p(E_4)=$$
$$=p(D_1=1\cap D_2=1)+p(D_1=1\cap D_2=1)+p(D_1=1\cap D_2=1)+p(D_1=1\cap D_2=1)$$

$$P=P(E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4)=p(1)\cdot p(1)+p(2)\cdot p(2)+p(3)\cdot p(3)+p(4)\cdot p(4)$$

$$P=\left(\frac{8}{15}\right)^2+\left(\frac{4}{15}\right)^2+\left(\frac{2}{15}\right)^2+\left(\frac{1}{15}\right)^2=\frac{64+16+4+9}{225}=\frac{85}{225}=\frac{17}{45}\simeq 0,38=38\%$$

Domanda non richiesta dal quesito

Supponiamo che l'uscita di ogni faccia nei due dadi sia la stessa, cioè valga $\frac{1}{4}$. Calcolare la probabilità che nel lancio dei due dadi escano due numeri uguali.

$$P=p(1)\cdot p(1)+p(2)\cdot p(2)+p(3)\cdot p(3)+p(4)\cdot p(4)=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=4\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$$

$$P=0,25=25\%$$

[3] Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y=-4x+k$ sia tangente alla curva di equazione $y=x^3-4x^2+5$.

Per ottenere le coordinate delle ascisse degli eventuali punti di tangenza tra la retta e la curva basta uguagliare il coefficiente angolare $m=4$ della retta e la derivata della funzione $f(x)=x^3-4x^2+5$.

$$f'(x)=m \quad \Rightarrow \quad 3x^2-8x=-4 \quad 3x^2-8x+4=0 \quad x_1=\frac{2}{3} \quad x_2=2$$

I punti di tangenza sono $T_1\left(\frac{2}{3};\frac{95}{27}\right)$ e $T_2(2;-3)$ in quanto risulta:

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\left(\frac{2}{3}\right)^2+5=\frac{95}{27} \qquad f(2)=8-4\cdot 4+5=-3$$

I corrispondenti valori del parametro k si trovano risolvendo le equazioni:

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=-4\cdot\frac{2}{3}+k \quad \Rightarrow \quad \frac{95}{27}=-\frac{8}{3}+k \quad k=\frac{167}{27} \qquad \left[T_1\left(\frac{2}{3};\frac{95}{27}\right)\right]$$

$$f(2)=-4\cdot 2+k \quad \Rightarrow \quad -3=-8+k \quad k=5 \quad [T_2(2;-3)]$$

Altro procedimento

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$$ $\Rightarrow$ le curve di equazioni $f(x)=x^3-4x^2+5=0$ e $g(x)=-4x+k=0$ sono tangenti nei punti di ascissa x.

$$\begin{cases} x^3-4x^2+5=-4x+k \\ 3x^2-8x=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3-4x^2+4x+5-k=0 \\ 3x^2-8x+4=0 \end{cases} \quad 3x^2-8x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\sqrt{16-12}}{3}=\frac{4\pm 2}{3}=\begin{cases} x_1=\frac{2}{3} \\ x_2=2 \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema:

per $x=\frac{2}{3}$ otteniamo: $\frac{8}{27}-4\cdot\frac{4}{9}+5-k=0 \quad \mathbf{k}=\frac{8}{25}-\frac{16}{9}+5=\mathbf{\frac{167}{27}}$

per $x=2$ otteniamo: $8-4\cdot 4+4\cdot 2-k=0 \quad \mathbf{k}=8-16+8+5=\mathbf{5}$

Concludiamo affermando che:

per $k=\frac{167}{27}$ la retta e la curva sono tangenti nel punto di ascissa $x=\frac{2}{3}$

per $k=5$ la retta e la curva sono tangenti nel punto di ascissa $x=2$

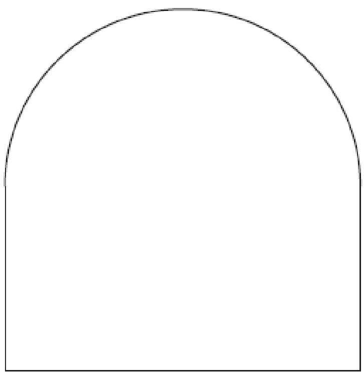
[4] Considerata la funzione $f(x)=\frac{3x-e^{\sin x}}{5+e^{-x}-\cos x}$, determinare, se esistono, i valori di $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, giustificando adeguatamente le risposte fornite.

$dom\, f(x)=\mathbb{R}$ in quanto il denominatore non si annulla mai; per questo motivo possiamo calcolare il limite della funzione proposta per $x\to-\infty$ e per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-e^{\sin x}}{5+e^{-x}-\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{5-\cos x}==+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{-e^{-x}}=\frac{3}{-\infty}=0-$$

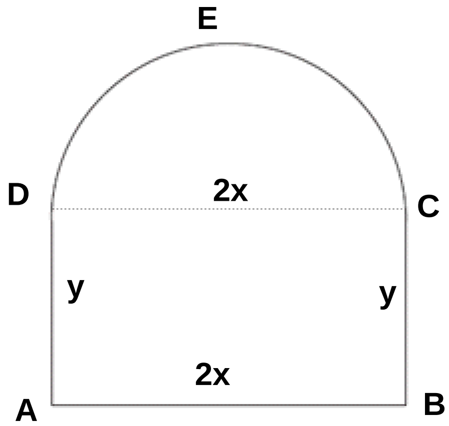
Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni limitate in quanto risulta: $\begin{cases}-1\le\sin x\le1\\-1\le\cos x\le1\end{cases}$

[5] Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:



Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

Consideriamo la figura $ABCED$ formata dal rettangolo $ABCD$ e dal semicerchio $\overset{\frown}{CED}$.
Indico con $2x$ la base del rettangolo e con y la sua altezza. x sarà il raggio del semicerchio $\overset{\frown}{CED}$.



$p(ABCED)=CD+2BC=2x+2y+\pi x$

$p(ABCED)=2 \quad \Rightarrow \quad 2x+2y+\pi x=2$

$2y=2-2x-\pi x \qquad \mathbf{y=1-\frac{\pi+2}{2}\cdot x} \qquad S(ABCED)=2xy+\frac{\pi}{2}x^2=2x\left(1-\frac{\pi+2}{2}x\right)+\frac{\pi}{2}x^2$

$$\mathbf{S(ABCED)}=2x-(\pi+2)x^2+\frac{\pi}{2}x^2=\mathbf{-\left(\frac{\pi+4}{2}\right)x^2+2x}$$

$S'(x)=-(\pi+4)x+2 \quad S'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x=\frac{2}{\pi+4}}$ punto di massimo assoluto in quanto risulta:

$S''(x)=-(\pi+4)<0 \qquad \mathbf{y}=1-\frac{\pi+2}{2}\cdot\frac{2}{\pi+4}=1-\frac{\pi+2}{\pi+4}=\frac{\pi+4-\pi-2}{\pi+4}=\mathbf{\frac{2}{\pi+4}} \qquad AB=2x=\frac{4}{\pi+4}$

$\mathbf{S\left(\frac{2}{\pi+4}\right)}=-\left(\frac{\pi+4}{2}\right)\cdot\frac{4}{(\pi+4)^2}+\frac{4}{\pi+4}=\frac{-2}{\pi+4}+\frac{4}{\pi+4}=\mathbf{\frac{2}{\pi+4}}$

Le dimensioni del rettangolo di area massima sono: $AB=2x=\frac{4}{\pi+4} \qquad BC=y=\frac{2}{\pi+4}$

$[6]$ Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta $r:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

tangente al piano $\pi:3x-y-2z+14=0$ nel punto $T(-4,0,1)$.

$\vec{n}=(a,b,c)=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ è un vettore perpendicolare al piano di equazione $ax+by+cz+d=0$

$\vec{n}=(3,-1,-2)=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ è un vettore perpendicolare al piano π di equazione $3x-y-2z+14=0$

La retta s passante per il punto $T(-4,0,1)$ e perpendicolare al piano π ha equazione: $\begin{cases} x=-4+3k \\ y=-k \\ z=1-2k \end{cases}$

Il centro $C(\alpha,\alpha,\alpha)$ della superficie sferica S ha coordinate uguali in quanto appartiene alla retta

$$r: \begin{cases} x=t \\ y=t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases} \quad \text{con } \alpha\in\mathbb{R}$$

Impongo la sua appartenenza alla retta s di equazione $\begin{cases} x=-4+3k \\ y=-k \\ z=1-2k \end{cases}$. Ottengo:

$$\begin{cases} \alpha=-4+3k \\ \alpha=-k \\ \alpha=1-2k \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=-k \\ -k=-4+3k \\ -k=1-2k \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=-k \\ 4k=4 \\ k=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha\ -1 \\ k=1 \\ k=1 \end{cases} \quad \mathbf{C(-1;-1;-1)}$$

Indicando con $R=CT$ il raggio della sfera abbiamo: $R=\overline{CT}=\sqrt{(-4+1)^2+(0+1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{14}$

$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2\ R^2$ è l'equazione di una sfera di $C(x_C,y_C,z_C)$ e raggio R abbiamo:

$$\mathbf{(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=14} \qquad \mathbf{x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-11=0}$$

[7] Determinare a in modo che $\int_a^{a+1}(3x^2+3)\,dx$ sia uguale a 10.

$$a+1>a \quad \forall a\in\mathbb{R} \qquad \int(3x^2+3)\,dx=3\int(x^2+1)\,dx=3\left[\frac{x^3}{3}+x\right]$$

$$\int_a^{a+1}(3x^2+3)\,dx=3\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_a^{a+1}=3\left[\frac{(a+1)^3}{3}+(a+1)-\frac{a^3}{3}-a\right]=(a+1)^3+3(a+1)-a^3-3a$$

$$\int_a^{a+1}(3x^2+3)\,dx=\cancel{a^3}+3a^2+\cancel{3a}+1+3a+3-\cancel{a^3}-\cancel{3a}=3a^2+3a+4$$

$$\int_a^{a+1}(3x^2+3)\,dx=10 \;\Rightarrow\; 3a^2+3a+4=10 \;\Rightarrow\; 3a^2+3a-6=0 \quad a^2+a-2=0 \quad \mathbf{a_1=-2} \quad \mathbf{a_2=1}$$

[8] In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna patita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

Indichiamo con G_1 il primo giocatore e con G_2 il secondo giocatore e supponiamo che essi non possano pareggiare, cioè supponiamo che uno dei due giocatori deve vincere. Poiché i due giocatori hanno la stessa probabilità di vincere possiamo scrivere: $p(G_1)=p(G_2)=\frac{1}{2}$

$p(G_1)$ = probabilità che ha il giocatore G_1 di vincere la partita

$p(G_2)$ = probabilità che ha il giocatore G_2 di vincere la partita

La probabilità che su $n=12$ partite il giocatore G_1 vince k volte è data dalla formula:

$$p_n(G_1=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\binom{12}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Infatti se l'evento E si verifica k volte su n prove esso può presentarsi con $\binom{n}{k}$ modalità (configurazioni), ed in ognuna di esse la probabilità è $\frac{1}{2}$. La formula precedente è così giustificata.

$p(G_1\geq 10)=p(G_1=10)+p(G_1=11)+p(G_1=12)$ = vince il giocatore G_1

$p(G_1\leq 2)=p(G_1=0)+p(G_1=1)+p(G_1=2)$ = vince il giocatore G_2

E = vince uno dei due giocatori in un numero di partite minore o uguale a 12

$$p(E)=p(G_1\geq 10)+p(G_1\leq 2)=p(G_1=10)+p(G_1=11)+p(G_1=12)+$$
$$+p(G_1=0)+p(G_1=1)+p(G_1=2)$$

$$p(E)=\binom{12}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+\binom{12}{11}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+\binom{12}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+\binom{12}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+\binom{12}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+\binom{12}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

$$\mathbf{p(E)=\left(\frac{1}{2}\right)^{12}(66+12+1+1+12+66)=\frac{158}{2^{12}}=\frac{79}{2^{11}}}$$

Altra soluzione

Possiamo applicare lo **schema delle prove ripetute** o di Bernoulli. Questo schema considera n prove successive di un evento E avente la probabilità costante p di verificarsi ogni volta. L'evento E si deve verificare k volte (k successi) con probabilità p e non si deve verificare $n-k$ volte ($n-k$ insuccessi) con probabilità $q=1-p$. La probabilità che l'evento E si verifichi k volte nelle n prove effettuate è data da:

$$\mathbf{p_{n,k}(E) = p(E,n,k) = p_{E,n,k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

$\mathbf{p_{n,k}(E)}$ = probabilità che l'evento $\mathbf{E}$ si verifichi $\mathbf{k}$ volte in $\mathbf{n}$ prove = probabilità che in $\mathbf{n}$ prove si abbiano $\mathbf{k}$ **successi** ed $\mathbf{n-k}$ **insuccessi**.

Consideriamo i seguenti eventi:

E_1 = il giocatore G_1 vince 10 partite e il giocatore G_2 vince 0 partite

In questo caso il giocatore G_1 vince 10 partite di seguito

E_2 = il giocatore G_1 vince 10 partite e il giocatore G_2 vince 1 partita

In questo caso il giocatore G_1 perde una sola partita tra le prime 10 e vince l'undicesima partita

E_3 = il giocatore G_1 vince 10 partite e il giocatore G_2 vince partite

In questo caso il giocatore G_1 perde due partite tra le prime 11 e vince la dodicesima partita

$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ = il giocatore G_1 raggiunge il punteggio richiesto al massimo in 12 partite

$p(E) = p(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ = probabilità che il giocatore G_1 raggiunge il punteggio richiesto al massimo in 12 partite

L'evento E_1 si verifica se il giocatore G_1 vince 10 partite di seguito.

$$p(E_1) = p_{10;10} = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{2^{10}}$$

L’evento E_2 si verifica se il giocatore G_1 perde una sola partita tra le prime 10 giocate e vince l’undicesima partita.

$$p(E_2)=p_{10;9}\cdot p_{11}(G_1)=\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{1}{2}=10\cdot\frac{1}{2^{11}}$$

L’evento E_3 si verifica se il giocatore G_1 perde due partite tra le prime 11 giocate e vince la dodicesima partita.

$$p(E_3)=p_{11;9}\cdot p_{11}(G_1)=\binom{11}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11\cdot10}{2}\cdot\frac{1}{2^{12}}=55\cdot\frac{1}{2^{12}}$$

Poiché gli eventi E_1, E_2, E_3 sono fra loro incompatibili abbiamo:

$$p(E)=p(E_1\cup E_2\cup E_3)=p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)=\frac{1}{2^{10}}+10\cdot\frac{1}{2^{11}}+55\cdot\frac{1}{2^{12}}=\frac{4+20+55}{2^{12}}=\frac{79}{2^{12}}$$

Poiché il giocatore G_2 ha la stessa probabilità di G_1 di vincere la gara, la probabilità che uno dei due giocatori vinca la gara al massimo in 12 partite è la seguente:

$$p(E)+p(F)=\frac{79}{2^{12}}+\frac{79}{2^{12}}=2\cdot\frac{79}{2^{12}}=\frac{79}{2^{11}}\simeq 0,039=3,9\%$$

dove $p(F)$ esprime la probabilità che il giocatore G_2 raggiunge il punteggio richiesto al massimo in 12 partite

[9] Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(3;1;0)$, $B(3;-1;2)$, $C(1;1;2)$. Dopo vere verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x+y+z-4=0$, stabilire quali sono i punti P tali che $ABCP$ sia un tetraedro regolare.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(3-3)^2+(-1-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(1+1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$CA=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2+(z_A-z_C)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(1-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$AB = BC = CA \quad \Rightarrow \quad ABC$ triangolo equilatero

La geometria euclidea ci dice che per tre punti non allineati passa un solo piano. I tre punti A, B, C appartengono al piano α se le loro coordinate verificano l'equazione del piano α.

$3+1+0-4=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow A\in\alpha \quad ; \quad 3-1+2-4=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow B\in\alpha$

$1+1+2-4=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow C\in\alpha$

Le coordinate del baricentro G del triangolo equilatero ABC sono:

$$X_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{3+3+1}{3} = \frac{7}{3} \quad Y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1-1+1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$Z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{0+2+2}{3} = \frac{4}{3} \qquad G\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$$

Il vettore $\vec{n} = (\ell; m; n) = (1;1;1)$ rappresenta una direzione ortogonale al piano $\alpha: x+y+z-4=0$

Il vertice P del tetraedro regolare $ABCP$ si trova sulla retta r passante per il baricentro G del triangolo ABC e perpendicolare al piano $\alpha: x+y+z-4=0$.

Le equazioni parametriche della retta r sono le seguenti: $\begin{cases} x = x_G + k\,\ell \\ y = y_G + k\,m \\ z = z_G + k\,n \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{7}{3} + k \\ y = \frac{1}{3} + k \\ z = \frac{4}{3} + k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{R}$

$$P \in r \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{7}{3}+k;\frac{1}{3}+k;\frac{4}{3}+k\right)$$

Per individuare le coordinate del punto P possiamo utilizzare due procedimenti.

Primo procedimento

Basta imporre che gli spigoli del tetraedro regolare $ABCP$ sono uguali; possiamo porre:

$$PA = AB \quad \Rightarrow \quad PA^2 = AB^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{7}{3}+k-3\right)^2 + \left(\frac{1}{3}+k-1\right)^2 + \left(\frac{4}{3}+k-0\right)^2 = 8$$

$$\left(k-\frac{2}{3}\right)^2+\left(k-\frac{2}{3}\right)^2+\left(k+\frac{4}{3}\right)^2=8 \qquad 2\left(k^2-\cancel{\frac{4}{3}k}+\frac{4}{9}\right)+k^2+\cancel{\frac{8}{3}k}+\frac{16}{9}=8$$

$$3k^2+\frac{24}{9}=8 \qquad k^2=\frac{16}{9} \qquad k=\pm\frac{4}{3} \qquad k=\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; \mathbf{P_1\left(\frac{11}{3};\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)} \qquad k=-\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; \mathbf{P_2(1;-1;0)}$$

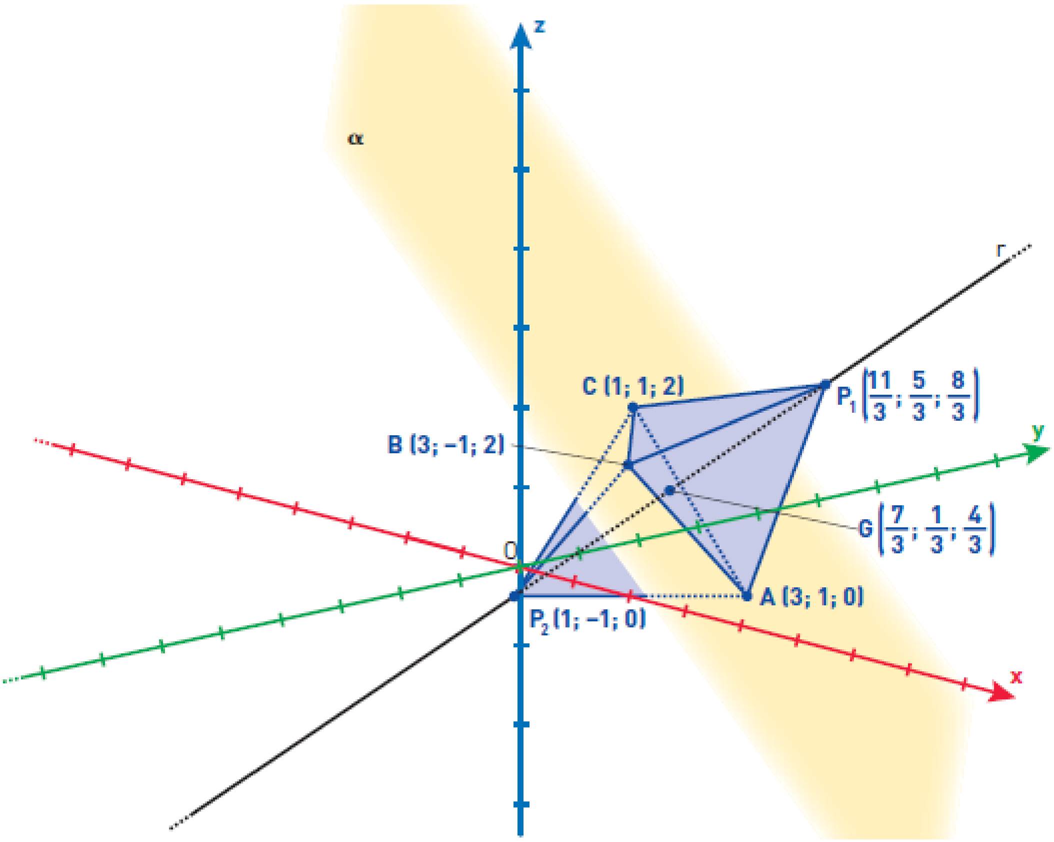
Secondo procedimento

$$AG^2=\left(\frac{7}{3}-3\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}-0\right)^2 \quad \frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$$

Poiché il tetraedro è regolare risulta: $AP=AB=2\sqrt{2}$

$$PG=\sqrt{AP^2-AC^2}=\sqrt{8-\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}} \qquad d(P,\alpha)=\frac{4}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \frac{\left|\cancel{\frac{7}{3}}+k+\cancel{\frac{1}{3}}++k+\cancel{\frac{4}{3}}+k-\cancel{4}\right|}{\cancel{\sqrt{1+1+1}}}=\frac{4}{\cancel{\sqrt{3}}}$$

$$|3k|=4 \qquad k=\pm\frac{4}{3} \qquad k=\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; \mathbf{P_1\left(\frac{11}{3};\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)} \qquad k=-\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; \mathbf{P_2(1;-1;0)}$$



[10] Determinare quali sono i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $y(x) = 2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.

$y'(x) = 2k\,e^{kx+2}$ $\quad y''(x) = 2k^2\,e^{kx+2}$

Sostituendo $y'(x) = 2k\,e^{kx+2}$ e $y''(x) = 2k^2\,e^{kx+2}$ nell'equazione differenziale proposta otteniamo:

$$2k^2\,e^{kx+2} - 4k\,e^{kx+2} - 6e^{kx+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2e^{kx+2}\left(k^2 - 2k - 3\right) = 0$$

Applico la legge di annullamento di un prodotto di fattori; ottengo:

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \qquad k_1 = -1 \qquad k_2 = 3$$

Per tali valori la funzione $y(x) = 2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$